Dinámica Hamiltoniana y Geometría Simpléctica
Curso de Posgrado - 1er semestre 2021

Lista de Ejercicios n. 1

Semana del 23 al 27 de marzo

Ejercicio 1

Sea (E, W) un espacio vectorial simpléctico. Es decir, E es un espacio vectorial de dimensión finita, y $W : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal antisimétrica y no degenerada. Recordamos que esto último significa que si para algún vector $u \in E$ se cumple $W(v, u) = 0$ para todo $v \in E$, entonces se tiene que $u = 0$.

(a) Probar que si A es la matriz asociada a la forma W en alguna base cualquiera de E, entonces A es antisimétrica y su determinante no nulo. Concluir E tiene dimensión par

(b) Probar que E admite una base *simpléctica*, es decir una base

$$B = \{ e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n \}$$

tal que para todo $1 \leq i, j \leq n$ vale $W(f_i, e_j) = \delta_{ij}$, y $W(e_i, e_j) = W(f_i, f_j) = 0$.

Ejercicio 2

Sea (E, W) un espacio vectorial simpléctico.

Definición 1 (*Espacio ortogonal*)**.** Dado un conjunto $S \subset E$ definimos su *ortogonal simpléctico* como el subespacio de E

$$S^\perp = \{ v \in E \mid W(v, s) = 0 \text{ para todo } s \in S \}.$$

(a) Probar que si V es un subespacio de E entonces su ortogonal simpléctico tiene dimensión complementaria.

$$\dim E = \dim V + \dim V^\perp.$$

Sugerencia: considerar la aplicación lineal de E en $V^\star$ que induce W.

(b) Observar que la inclusión $S_1 \subset S_2$ implica trivialmente la inclusión $S_2^\perp \subset S_1^\perp$, y deducir utilizando la parte anterior que para todo subespacio $V \subset E$ se cumple que $(V^\perp)^\perp = V$.

(c) Un subespacio V de E se dice *isotrópico* cuando la restricción de W a E es idénticamente nula. Es decir, si cumple que $V \subset V^\perp$. Observar que todo subespacio unidimensional es isotrópico.

(d) Análogamenete, un subespacio V es *coisotrópico* cuando se verifica la inclusión $V^\perp \subset V$. Probar que todo subespacio de codimensión 1 es coisotrópico.

Ejercicio 3

Un subespacio V de un espacio vectorial simpléctico E se dice *subespacio lagrangiano* cuando es isotrópico maximal. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) $V \subset E$ es lagrangiano.

(ii) V es isotrópico y $\dim V = n$, siendo $\dim E = 2n$.

(iii) $V = V^{\perp}$, es decir, V es a la vez isotrópico y coisotrópico.

(iv) V es un es un subespacio coisotrópico minimal.

Ejercicio 4

Un subespacio V de un espacio vectorial simpléctico (E, W) se dice *subespacio simpléctico* si la restricción de W a V es una forma simpléctica. Probar que $V \subset E$ es simpléctico si y sólo si $V \cap V^{\perp} = \{ 0 \}$, es decir, si $E = V \oplus V^{\perp}$.

Ejercicio 5

El espacio simpléctico canónico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Un isomorfismo $T : E_1 \longrightarrow E_2$ entre espacios simplécticos, o isomorfismo canónico, es todo aquel que verifica $W_2(T(u), T(v)) = W_1(u, v)$ para todo par de vectores $u, v \in E_1$.

Definición 2. Se define aplicación bilineal alternada ω_0 en $\mathbb{R}^{2n}$ como la única para la cual la base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$ es una base simpléctica.

(a) Verificar que explícitamente ω_0 se escribe

$$\omega_0((x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_n), (x'_1, \dots, x'_n,\ y'_1, \dots, y'_n)) = \sum_{k=1}^{n} y_k x'_k - y'_k x_k.$$

En otras palabras,

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^{n} dy_k \wedge dx_k.$$

(b) Verificar que equivalentemente, si $u = (x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_n)$, y $v = (x'_1, \dots, x'_n,\ y'_1, \dots, y'_n)$, entonces

$$\omega_0(u, v) = \langle Ju, v \rangle,$$

donde J es la matriz cuadrada $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Demostrar que todo espacio vectorial simpléctico de dimensión $2n$ es simplécticamente isomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

(d) Identificando $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$ mediante $((x_k), (y_k)) = (z_k = x_k + iy_k)$, comprobar que ω_0 se escribe en términos del producto interno de $\mathbb{C}^n$ como

$$\omega_0(z, z') = \Re \langle -iz , z' \rangle.$$

Ejercicio 6

El grupo simpléctico $Sp\,(n)$.

Sea E un espacio vectorial simpléctico. Denotamos $Sp\,(E)$ al grupo de todos los automorfismos de E que preservan su estructura simpléctica.

(a) Probar que si $\dim E = 2n$ entonces $Sp\,(E)$ es isomorfo a $Sp\,(\mathbb{R}^{2n})$.

(b) Probar que $Sp\,(\mathbb{R}^{2n})$, es decir el grupo de los automorfismos de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, es isomorfo al grupo de las matrices simplécticas:

$$\mathbf{Sp}\,(\mathbf{n}) = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2n} \mid A^t J A = J \right\}.$$

(c) Verificar que $J^t = J^{-1} = -J$, y que en particular se tiene que $J^2 = -I$ y que $J \in Sp\,(n)$. Probar que si $A \in Sp\,(n)$ entonces también $A^t \in Sp\,(n)$.

(d) Sea $U \in \mathcal{M}_{2n}$ una matriz cuya escritura en bloques $n \times n$ es

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Probar que U es una matriz simpléctica si y sólo si A^tC y B^tD son simétricas y además se cumple $A^tD - C^tB = I_n$.

Ejercicio 7

Fibrados cotangentes. Sea M una variedad C^∞ y $U \subset M$ un entorno abiero coordenado. Es decir, tenemos definidas en U coordenadas

$$q = (q_1, \dots, q_n) \,:\, U \longrightarrow V = q(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

(a) Definir exactamente las coordenadas

$$(q, p) = (q_1 \dots, q_n,\ p_1, \dots, p_n) \,:\, T^\star U \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

para las cuales la forma de Liouville $\lambda \in \Omega^1(T^\star M)$ se escribe en coordenadas locales como

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} p_k dq_k\,.$$

(b) Sea $\omega = d\lambda$ la forma simpléctica canónica de $T^\star M$. Verificar que estas coordenadas (q, p) definidas en $T^\star U$ son coordenadas simplécticas, es decir, definen un simplectomorfismo entre el fibrado trivial $(T^\star U, \omega)$ y un abierto de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

(c) Sea $L \in \Gamma(T^\star M)$ una sección del fibrado cotangente. Es decir, L es una subvariedad de $T^\star M$ tal que la restricción de la proyección (mapa fibrado) $\pi : T^\star M \longrightarrow M$ a la subvariedad L define un difeomorfismo entre L y M. La inversa de este difeomorfismo no es otra cosa que una 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$.

Probar que el pullback $(\pi\,|_L)^\star \alpha = \lambda\,|_L$ y concluir que L es una subvariedad lagrangiana si y sólo si $d\alpha = 0$, es decir, α es una 1-forma cerrada.

Ejercicio 8

Sea (N, ω) una variedad simpléctica, y $L \subset M$ una subvariedad lagrangiana de N. Sea ahora una cierta función $H \in C^1(N)$, y X_H su gradiente simpléctico.

(a) Probar que si en un punto $p \in N$ se tiene que $T_pL \subset \ker d_pH$ etonces también se tiene que $X_H(p) \in T_pL$.

(b) Probar el recíproco de la afirmación anterior.

(c) Suponiendo que el campo de vectores X_H es únicamente integrable y llamando ϕ_H al flujo local generado, probar que: (i) Si L está contenida en un nivel de H entonces es ϕ_H-invariante, y (ii) Que si L es ϕ_H-invariante y conexa, entonces H es constante en L.

Ejercicio 9

Definición 3 (*Hamiltonianos de Tonelli)*. Dada una variedad riemanniana (M, g) decimos que una función $H : T^\star M \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 es un hamiltoniano de Tonelli si es C^2-convexo y superlineal, es decir, si

(i)
$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(q, p) > 0$$
para todo $q \in M$ y todo $p \in T_q^\star M$, y

(ii) para todo $K > 0$ existe $C_K \in \mathbb{R}$ tal que
$$H(q, p) \geq K\| p \| + C_K$$
para todo $q \in M$ y todo $p \in T_q^\star M$.

(a) Probar que si M es compacta y H es de Tonelli, entonces el gradiente simpléctico de H (i.e. el campo hamiltoniano X_H) es completo.

(b) Probar que si α 1-forma en M, y $V \in C^2(M)$, entonces el hamiltoniano *magnético*
$$H(q, p) = \frac{1}{2}\| p - \alpha_q \|^2 + V(q)$$
es de Tonelli sólo si V es superiormente acotada.

(c) Describir los conjuntos de nivel $H^{-1}(c)$ en función de $c \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

1. Problema de Kepler: $M = \mathbb{R}^d \setminus \{ 0 \}$, $\alpha = 0$ y $V(q) = -\| q \|^{-1}$.
2. Péndulo simple: $M = S^1 = \left\{ q = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$, $\alpha = 0$ y $V(q) = y$. Para este caso se sugiere parametrizar S^1 con el ángulo que forma q con la vertical.
3. Flujo geodésico: (M, g) variedad riemanniana, $\alpha = 0$, $V = 0$.