

# Dinámica Hamiltoniana y Geometría Simpléctica

## Curso de Posgrado - 1er semestre 2021

### Lista de Ejercicios n. 5

## Ejercicio 1

### (Puntos críticos Lagrangianos)

En este ejercicio estudiaremos en detalle la estabilidad del problema de los tres cuerpos planar, circular y restringido. Recordar que el Hamiltoniano para este problema, en coordenadas rotacionales, es

$$H : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{e, m\}) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|q - m\|} - \frac{1 - \mu}{\|q - e\|} + q_1 p_2 - p_1 q_2,$$

dónde  $e = (-\mu, 0)$  es la posición de la Tierra, y  $m = (1 - \mu, 0)$ , la de la Luna.

(a) **(Potencial efectivo)** Completando cuadrados, reescribir el Hamiltoniano cómo

$$H(q, p) = \frac{1}{2}((p_1 - q_2)^2 + (p_2 + q_1)^2) + U(q),$$

dónde  $U(q) = V(q) - \frac{\|q\|^2}{2}$  es el *potencial efectivo*, y  $V(q) = -\frac{\mu}{\|q - m\|} - \frac{1 - \mu}{\|q - e\|}$  es el *potencial Newtoniano*. Interpretar  $H$  cómo un Hamiltoniano magnético con potencial magnético  $A(q) = (q_2, -q_1)$ , e interpretar las fuerzas que aparecen en  $H$ . Probar que la proyección

$$\pi : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{e, m\}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{e, m\},$$

$$\pi(q, p) = q,$$

induce una biyección

$$\pi|_{\text{crit}(H)} : \text{crit}(H) \rightarrow \text{crit}(U),$$

con inversa  $(q_1, q_2) \mapsto (q_1, q_2, q_2, -q_1)$ , dónde  $\text{crit}(H)$  denota los puntos críticos de  $H$ , i.e. aquéllos  $(q, p)$  dónde  $d_{(q,p)}H = 0$ . Notar que  $H(L) = U(L)$  si  $L$  es punto crítico de  $H$ .

(b) **(Puntos críticos equiláteros)** Probar que el mapa

$$\phi : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \Theta,$$

$$\phi(q) = (\|q - m\|, \|q - e\|)$$

es un difeomorfismo, dónde  $\Theta = \{(\rho, \sigma) \in (0, \infty)^2 : \rho + \sigma > 1, \|\rho - \sigma\| < 1\}$ . Definiendo  $V = U \circ \phi^{-1}$ , probar que  $V$  tiene a  $(1, 1)$  cómo único punto crítico, que es un máximo. Deducir que  $U$  tiene a  $\ell_4 = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$  cómo único punto crítico en el semi-plano superior

$\{q_2 > 0\}$ . Notando que  $U(\bar{q}) = U(q)$ , deducir que  $U$  tiene únicamente dos puntos críticos  $\ell_4 = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\ell_5 = \bar{\ell}_4 = (\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  fuera del eje  $\{q_2 = 0\}$  que contiene a las primarias, ambos máximos, tal que ambos forman triángulos equiláteros con la Tierra y la Luna.

*Nota: Observar que esto no es nada más que la idea de Lagrange para encontrar configuraciones centrales con tres cuerpos en el plano.*

(c) **(Puntos críticos colineales)** Considerar la restricción de  $U$  al eje real, dada por

$$u = U|_{\mathbb{R} \setminus \{\mu, 1-\mu\}} : \mathbb{R} \setminus \{\mu, 1-\mu\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$u(r) = -\frac{\mu}{\|r + \mu - 1\|} - \frac{1-\mu}{\|r + 1\|} - \frac{r^2}{2}.$$

Notar que la simetría de  $U$  respecto al eje real implica que los puntos críticos de  $U$  sobre este eje son precisamente los puntos críticos de  $u$ . Probar que  $u$  es estrictamente cóncava, y que  $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} u(r) = \lim_{r \rightarrow \mu} u(r) = \lim_{r \rightarrow 1-\mu} u(r) = -\infty$ , y deducir que existen precisamente tres puntos críticos de  $U$  sobre el eje real,  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ . Los ordenamos de tal forma que

$$-\infty < \ell_3 < -\mu < \ell_1 < 1 - \mu < \ell_2 < +\infty.$$

Probar que los tres son puntos silla.

*Nota: A diferencia de  $\ell_4, \ell_5$ , no hay fórmula cerrada para  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ , ya que requeriría resolver una ecuación de orden 5 con coeficientes dependientes de  $\mu$ . Para el último punto, probar que  $\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}(\ell_i) > 0$  para  $i = 1, 2, 3$  es computacionalmente demandante; más razón para que hagan esta cuenta. Plummer, al que se acredita con ser el primero en hacer la cuenta para todo valor de  $\mu$ , dice en su artículo: "I have thought it worth while to give a definite proof of this fact because on this point Dr. Charlier says: "That is what I have found through numerical calculations for different values of  $\mu$ , an algebraic demonstration of this fact seeming to be somewhat complicated."*

(d) Comprobar que el valor máximo de  $U$  se da precisamente en  $\ell_4, \ell_5$ , dónde

$$\max U = U(\ell_4) = U(\ell_5) = -\frac{3}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$

Probar que si  $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ , se cumple que

$$U(\ell_1) < U(\ell_2) < U(\ell_3),$$

y que si  $\mu = \frac{1}{2}$ , vale que

$$U(\ell_1) < U(\ell_2) = U(\ell_3).$$

Esto justifica el orden elegido anteriormente para  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ . Notar que si  $\mu \in (\frac{1}{2}, 1)$  se puede cambiar el rol de Tierra y Luna para obtener

$$U(\ell_1) < U(\ell_3) < U(\ell_2).$$

(e) Recordar que el índice de Morse de un punto crítico no-degenerado es el número de valores críticos negativos del Hessiano. Poner todo junto, y deducir:

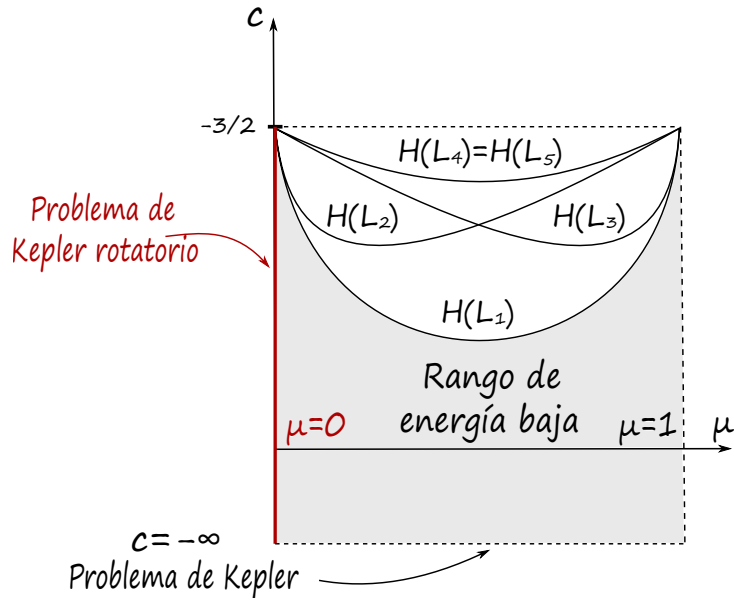


Figure 1: Los valores críticos de  $H \equiv c$  como función de  $\mu$ . Notar la simetría respecto de  $\mu = \frac{1}{2}$ . Llamaremos a la región  $c < H(L_1)$  el *rango de energía baja*. El caso  $\mu = 0$  es el *problema de Kepler rotatorio*, que es el problema de dos cuerpos en coordenadas que rotan. Luego de regularizar, el caso límite  $c \rightarrow -\infty$  es el problema de Kepler usual.

**Teorema.** Si  $L_i \in \text{crit}(H)$  es el correspondiente punto crítico a  $\ell_i \in \text{crit}(U)$ , se cumple que, si  $\mu \in (0, 1)$ , los índices de Morse de  $L_i$  están dados por

$$\text{ind}(L_1) = \text{ind}(L_2) = \text{ind}(L_3) = 1, \quad \text{ind}(L_4) = \text{ind}(L_5) = 2.$$

Si  $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ , los valores críticos están ordenados por

$$H(L_1) < H(L_2) < H(L_3) < H(L_4) = H(L_5).$$

Si  $\mu = \frac{1}{2}$ , vale que

$$H(L_1) < H(L_2) = H(L_3) < H(L_4) = H(L_5).$$

Ver la Figura 1, y las Figuras 2, 3, 4 en términos de estabilidad de Hill.

## Ejercicio 2

**(Problema de Kepler rotatorio)** El problema de Kepler rotatorio es el caso límite  $\mu = 0$  del problema de tres cuerpos circular y restringido, i.e. la Luna ya no está, y el problema se convierte en un problema de Kepler donde las coordenadas rotan. El Hamiltoniano es

$$H : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(q, p) = K + L,$$

dónde

$$K = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|}$$

es el problema de Kepler, y

$$L = q_1 p_2 - p_1 q_2$$

es la componente horizontal del momento angular. Ahora la Tierra  $e$  se encuentra en el origen.

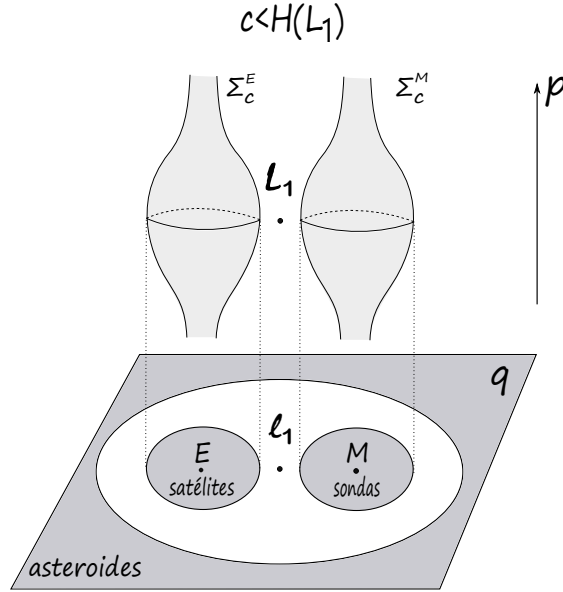


Figure 2: La región de Hill en energía  $c$  es  $\mathcal{K}_c = \pi(\Sigma_c)$  dónde  $\Sigma_c = H^{-1}(c)$ ,  $\pi(q, p) = q$ . En el rango de energía baja  $c < H(L_1)$ , tenemos  $\mathcal{K}_c = \mathcal{K}_c^E \cup \mathcal{K}_c^M \cup \mathcal{K}_c^u$  dónde  $\mathcal{K}_c^E = \pi(\Sigma_c^E)$  y  $\mathcal{K}_c^M = \pi(\Sigma_c^M)$  son las componentes acotadas, que contienen a la Tierra y Luna respectivamente. Si un satélite se mueve en  $\mathcal{K}_c^E$  con poca energía, se quedará siempre cerca de la Tierra; análogamente si una "sonda" se mueve en  $\mathcal{K}_c^M$ , se pasará todo el tiempo cercana a la Luna si no tiene energía para hacer otra cosa; si un asteroide viene desde el infinito sin demasiada energía, se quedará siempre a una distancia acotada de la Tierra y la Luna. Observar que las componentes  $\Sigma_c^E, \Sigma_c^M$  de  $\Sigma_c$  son no compactas, justamente porque  $p = \infty$  en las colisiones  $q = E$  ó  $q = M$ . Esta figura es un sketch topológico, ver la Figura 4 para un plot más fidedigno.

- (a) El potencial efectivo en este caso es  $U(q) = -\frac{1}{\|q\|} - \frac{\|q\|^2}{2}$ . Chequear que poniendo  $r = \|q\|$ ,  $U(r) = -\frac{1}{r} - \frac{r^2}{2}$  entonces  $U$  tiene un único punto en  $r = 1$  con valor crítico  $U(r) = -\frac{3}{2}$ , i.e.  $U$  tiene el círculo de radio 1 como conjunto singular. Concluir que  $H$  tiene a  $-3/2$  como único valor crítico. Notar que esto es compatible con el ejercicio anterior.
- (b) Probar que ambas  $L$  y  $K$  son integrales de  $H$ , y por lo tanto

$$\phi_H^t = \phi_K^t \circ \phi_L^t = \phi_L^t \circ \phi_K^t.$$

Dada una solución del problema de Kepler con  $K < 0$ , i.e. una elipse  $\varepsilon_\tau : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con período  $\tau$ , deducir que

$$\varepsilon_\tau^R(t) = e^{it} \varepsilon_\tau(t)$$

es solución del problema de Kepler rotatorio. Concluir que hay dos posibilidades:

- **(Órbitas de primer tipo)** Si  $\varepsilon_\tau$  es un círculo, luego  $\varepsilon_\tau^R$  es periódica a menos que sea un punto crítico (que puede pasar si  $\tau = 2\pi$ ).
- **(Órbitas de segundo tipo)** Si  $\varepsilon_\tau$  no es un círculo,  $\varepsilon_\tau^R$  es periódica si y sólo si se cumple la siguiente condición de resonancia:

$$2\pi l = \tau k, \text{ para algún } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Probar que las órbitas de segundo tipo satisfacen la simetría rotacional  $\varepsilon_\tau^R(t + \tau) = e^{2\pi i \frac{l}{k}} \varepsilon_\tau^R(t)$ . Ver Figura 5.

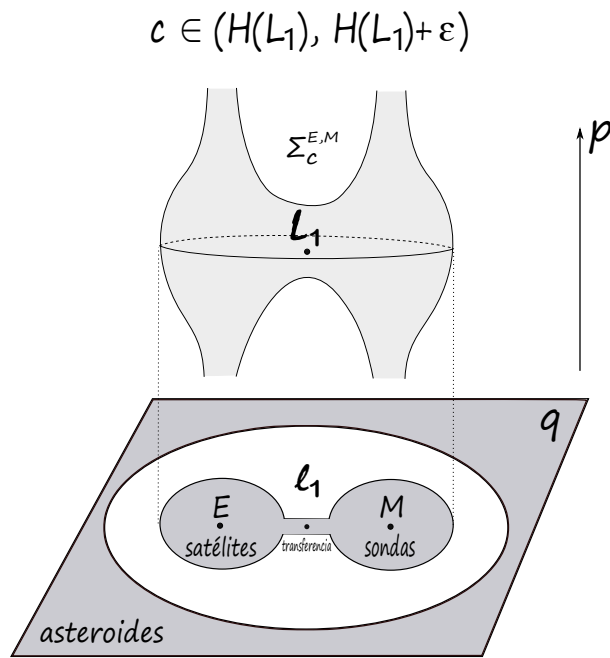


Figure 3: Si la energía  $c$  es apenas mayor que el primer valor crítico  $H(L_1)$ , dónde sabemos que  $L_1$  es punto silla, teoría de Morse nos indica que el conjunto de nivel  $\Sigma_c$  se obtiene de  $\Sigma_{H(L_1)-\varepsilon}$  agregando un 1-handle, i.e. es una suma conexas; ahora  $\mathcal{K}_c$  tiene dos componentes conexas, y esto es lo que se ve en la Figura. El satélite tiene ahora suficiente energía para atravesar la "zona de transferencia" entre Tierra y Luna, que es la proyección del 1-handle. Las regiones de Hill de mayor energía se pueden interpretar de forma similar.

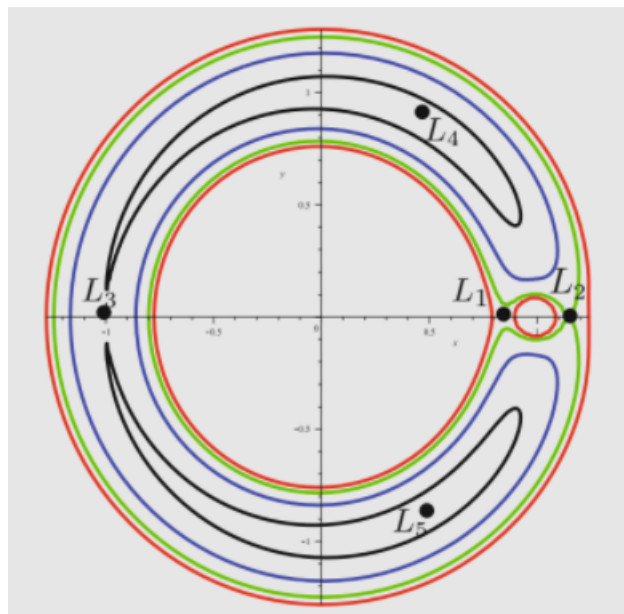


Figure 4: Un plot realista de las regiones de Hill.

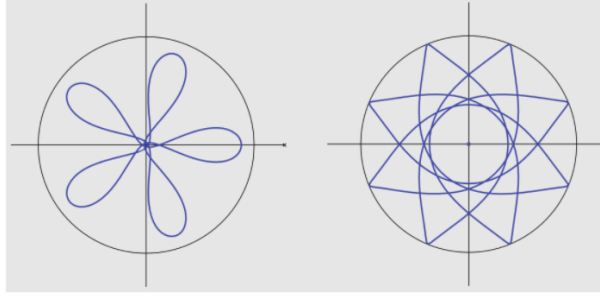


Figure 5: Ejemplos de órbitas del problema de Kepler rotatorio con  $H = 1.6$  (parecen “flores”). El círculo en el borde es el borde de la región de Hill.

(c) Consideramos la esfera  $S^n = \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \|q\| = 1\}$ , y la proyección estereográfica:

$$\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\pi(q_0; \vec{q}) = \frac{\vec{q}}{1 - q_0},$$

dónde  $N = (1; 0, \dots, 0)$  es el polo Norte, con inversa

$$\pi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\},$$

$$\pi^{-1}(\vec{x}) = \left( \frac{\|\vec{x}\|^2 - 1}{\|\vec{x}\|^2 + 1}, \frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2 + 1} \right).$$

Comprobar que la métrica redonda  $g$  en  $S^n$  está dada, en coordenadas estereográficas, por

$$g^{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(\|\vec{x}\|^2 + 1)^2},$$

y deducir que el Hamiltoniano para el flujo geodésico de  $g$  es

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} p_i p_j = \frac{1}{8} (\|q\|^2 + 1)^2 \|p\|^2,$$

dónde  $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ .

(d) **(Caso límite  $c \rightarrow -\infty =$  Problema de Kepler)** Observar que si  $c < 0$ , el mapa

$$\Phi : (q, p) \mapsto \left( \frac{q}{-2c}, \sqrt{-2cp} \right)$$

es *conformemente* simpléctico, i.e.  $\Phi^*(dp \wedge dq) = \frac{1}{\sqrt{-2c}} dp \wedge dq$ . Combinando con el switch map  $(q, p) \mapsto (-p, q)$  (que preserva la forma simpléctica), consideramos el Hamiltoniano regularizado

$$\begin{aligned} K^c(q, p) &:= \frac{1}{2} \left( -\frac{\|q\|}{2c} \left( H\left(-\frac{q}{-2c}, \sqrt{-2cp}\right) - c \right) + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(1 + \|p\|^2) + \frac{(q_1 p_2 - q_2 p_1)}{(-2c)^{3/2}} \right)^2 \|q\|^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Probar que  $X_H|_{H^{-1}(c)}$  es una reparametrización de  $X_{K^c}|_{(K^c)^{-1}(0)}$ , y que  $K^c$  se extiende diferenciablemente a un Hamiltoniano en  $T^*S^2$ .

Para tomar el límite  $c \rightarrow -\infty$ , que es problemático ya que el factor conforme converge a cero, definimos  $r \in (0, +\infty)$  via  $c = -\frac{1}{2r^{2/3}}$ , y consideramos

$$K_r(q, p) = K^{-\frac{1}{2r^{2/3}}}(q, p) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(1 + \|p\|^2) + (q_1 p_2 - q_2 p_1)r \right)^2 \|q\|^2 - \frac{1}{2}.$$

Notar que  $K_r$  se extiende a  $r = 0$  cómo

$$K_0(q, p) = \frac{1}{8} (1 + \|p\|^2)^2 \|q\|^2 - \frac{1}{2}.$$

Utilizando la parte anterior, interpretar a  $K_0$  cómo el Hamiltoniano quínetico en  $S^2$  con la métrica redonda con respecto al "momentum"  $q$ , via coordenadas estereográficas, y deducir que el problema de Kepler es el caso límite del problema de Kepler rotatorio cuando  $c \rightarrow -\infty$  (pensado como el flujo geodésico en  $S^2$ ).

*Nota: La transformación  $\Phi$  difiere de la convención estándar para la regularización de Moser, que considera el mapa  $(q, p) \mapsto \left( \frac{q}{\sqrt{-2c}}, \sqrt{-2c}p \right)$ , que si es simpléctico. Esto no afecta la dinámica, que se ve reparametrizada.*

- (e) **(Órbitas circulares)** Si  $K < 0$ , probar que en el problema de Kepler vale que  $\|A\|^2 = 1 + 2L^2K$ , dónde  $A$  es el vector de Runge-Lenz, cuya norma es la excentricidad de la órbita resultante (una elipse).

Deducir que

$$0 \leq 1 + 2K(H - K)^2 = 1 + 2H^2K - 4HK^2 + 2K^3 =: p(K, H),$$

con igualdad si y sólo si la órbita correspondiente es un círculo. Denotando  $p_H(K) = p^K(H) = p(K, H)$  (polinomio de orden 2 en  $H$  y 3 en  $K$ ), recordando que  $H$  tiene único valor crítico  $-3/2$  por la parte (a), comprobar que

$$p_{-3/2}(K) = 2(K + 2)(K + 1/2)^2,$$

i.e. tiene un cero simple en  $K = -2$  y uno doble en  $K = -1/2$ . Recordar que el discriminante de un polinomio  $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$  de grado 3 es por definición

$$\Delta(p) = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd,$$

y que si  $\Delta(p) > 0$  luego  $p$  tiene tres raíces reales distintas; si  $\Delta(p) = 0$  tiene una raíz doble; y si  $\Delta(p) < 0$ , tiene una raíz real y dos complejas conjugadas. Comprobar que

$$\Delta(p_H) = -32H^3 - 108,$$

y deducir que  $\Delta(p_H) > 0$  si  $H < -3/2$ ,  $\Delta(p_H) = 0$  si  $H = -3/2$ ,  $\Delta(p_H) < 0$  si  $H > -3/2$ . Sean  $K^1(H) < K^2(H) < K^3(H)$  las raíces de  $p_H$  para  $H \leq -3/2$ , con  $K^1(-3/2) = -2$ ,  $K^2(-3/2) = K^3(-3/2) = -1/2$ , y  $K^1(H)$  la única raíz real de  $p_H$  para  $H > -3/2$ . Comprobar que

$$\Delta(p^K) = -8K,$$

y por lo tanto  $p^K$  tiene dos raíces reales para  $K < 0$ . Concluir que  $K^1, K^2$  son monótonas crecientes y  $K^3$  es monótona decreciente, tal que

$$\lim_{H \rightarrow -\infty} K^1(H) = \lim_{H \rightarrow -\infty} K^2(H) = -\infty, \quad \lim_{H \rightarrow -\infty} K^3(H) = \lim_{H \rightarrow +\infty} K^1(H) = 0.$$

Concluir que para el problema de Kepler (no rotacional) con  $K < 0$  fija, existen precisamente dos órbitas circulares con valores de  $L$  opuestos (i.e. el mismo círculo recorrido en ambas orientaciones); y que fijado  $H$  (que a su vez fija  $K$  y  $L$ ), existen precisamente tres órbitas circulares si  $H < -3/2$ , y precisamente una si  $H > -3/2$ .

Utilizando que las soluciones del problema de Kepler están dadas en coordenadas polares por  $r = \frac{L^2}{1 + \|A\| \cos(\theta)}$ , concluir que las órbitas circulares correspondientes a  $K^1(H), K^2(H)$  tienen radio menor que 1 (i.e. están contenidas en la componente acotada de la región de Hill por la parte (a)), y que las correspondiente a  $K^3(H)$ , mayor que 1 (i.e. están contenidas en la componente no acotada).

*Nota: Las órbitas circulares correspondientes a  $K^1(H), K^2(H), K^3(H)$  se llaman respectivamente la órbita circular retrógrada, la interior directa, y la exterior directa.*