Dinámica Hamiltoniana y Geometría Simpléctica
Curso de Posgrado - 1er semestre 2021

Lista de Ejercicios n. 3

Semana del 5 al 9 de abril

Ejercicio 1

Para ilustrar la importancia del corchete de Poisson, este práctico va a ser un "crash course" o "ejercicio épico" en geometría de Poisson, y su relación con la dinámica Hamiltoniana y la geometría simpléctica. Dado que se aleja del propósito principal del curso, cónsiderese material complementario; pero es sumamente aconsejable hacerlo.

(Relaciones de conmutación canónicas, operadores de evolución, álgebras y variedades de Poisson, Tensor y campos de Poisson, Foliación característica, estructura de Lie–Poisson, cohomología de Poisson)

Recordar que, en coordenadas simplécticas (q, p), el corchete de Poisson de dos funciones (ó en lenguaje físico, *observables*) $f = f(q, p, t)$, $g = g(q, p, t)$, que en general pueden depender del tiempo t, se define como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}.$$

(a) **(Caso simpléctico: Relaciones de conmutación canónicas)** Comprobar que las coordenadas simplécticas (q, p) satisfacen las *relaciones de conmutación canónicas,* dadas por

$$\{q_i, q_j\} = 0,\ \ \{p_i, p_j\} = 0,\ \ \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Variables (q, p) que satisfacen estas relaciones se dicen *canónicas.* Probar que un mapa $F(q, p) = (Q(q, p), P(q, p))$ es un simplectomorfismo si y sólo si preserva las relaciones de conmutación canónicas, i.e. si las variables (Q, P) son canónicas. Por lo tanto, deducir que (q, p) son simplécticas si y sólo si son canónicas.

(Otro nombre usual para un simplectomorfismo es *transformación canónica*).

(b) **(Ecuaciones de Hamilton y operadores de evolución)** Comprobar que las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir utilizando el corchete de Poisson de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} & = \{q, H\} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} & = \{p, H\} \end{cases}$$

Deducir que el flujo Hamiltoniano está generado por el *operador de evolución* $U(t) = \exp(t\{\cdot, H\})$, i.e. $q(t) = U(t)q(0),\ \ p(t) = U(t)p(0)$.

Más global y generalmente, dado un observable $f = f(q, p, t)$ cualquiera, mostrar que su evolución bajo las ecuaciones de movimiento está regida por la ecuación

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = Lf,$$

dónde $L = \{\cdot, H\} + \frac{\partial}{\partial t}$ es el *operador de Liouville*, que no es nada más que X_H pensado como operador de derivación. En particular, si H es la energía total de un sistema mecánico y es autónomo, deducir que el principio de conservación de la energía se expresa sintéticamente por la expresión

$$\{H, H\} = 0.$$

En general, notar que $\{f, H\} = 0$ con f, H autónomos quiere decir que f es una cantidad conservada del flujo Hamiltoniano de H, y vice-versa.

(c) **(Álgebras y variedades de Poisson)** Un álgebra de Poisson es un par $(A, \{\cdot, \cdot\})$ dónde A es un álgebra asociativa, y $\{\cdot, \cdot\}$ es un corchete de Lie que satisface la ley de Leibnitz. Esto es, $\{\cdot, \cdot\}$ es bilineal y satisface:

1. (anti-simetría) $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
2. (Identidad de Jacobi) $\{f, \{g, h\}\} = \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\}$.
3. (Ley de Leibnitz) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.

Los primeros dos items dicen que el corchete de Poisson es en particular un corchete de Lie.

Dada una variedad simpléctica (M, ω), mostrar que $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ con el corchete definido por $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = -dg(X_f)$ es un álgebra de Poisson. En general, una variedad M es *de Poisson* si $A = C^\infty(M)$ viene con una estructura de álgebra de Poisson; en tanto, toda variedad simpléctica es de Poisson.

Mostrar que la Ley de Leibnitz es equivalente a que el gradiente simpléctico de $H \in C^\infty(M)$ se puede ver como una *derivación* con respecto del producto en $C^\infty(M)$, esto es, el mapa

$$X_H : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$X_H = \{\cdot, H\}$$

satisface $X_H(fg) = fX_H(g) + gX_H(f)$. Análogamente, mostrar que la Identidad de Jacobi es equivalente a que X_H es una derivación del corchete de Possion, i.e. $X_H\{f, g\} = \{X_H f, g\} + \{f, X_H g\}$. Una derivación respecto de las dos operaciones se llama un campo de vectores *de Poisson*.

(Notar que los observables $f \in C^\infty(M)$ se asumen autónomos y por lo tanto no hay $\frac{\partial}{\partial t}$ en X_H).

Nota: Las variedades simplécticas son el caso "no-degenerado" de variedades de Poisson. En general, esta variedades presentan degeneraciones en la estructura, i.e. el tensor de Possion asociado puede ser no invertible, cómo el caso de la estructura de Lie–Poisson. En general, toda variedad de Poisson trae una foliación por subvariedades simplécticas (la foliación característica), y el caso simpléctico se corresponde con el caso de una sóla hoja; ver lo que sigue.

(d) **(Tensor y campos de Poisson)** Dada una variedad de Poisson M, definimos el *tensor de Poisson* asociado cómo el único mapa

$$\pi : T^\star M \longrightarrow TM$$

que satisface

$$df(\pi(dg)) = \{f, g\},$$

para todo $f, g \in C^\infty(M)$. Probar que está bien definido, y que determina (y es determinado por) el corchete de Poisson. Notar que via los isomorfismos $\mathrm{Hom}(T^\star M, TM) \cong TM \otimes TM \cong \mathrm{Hom}(T^\star M \otimes T^\star M, \mathbb{R})$, π se puede ver cómo un bi-vector alternado $\pi \in TM \wedge TM$, ó bien cómo un mapa alternado

$$\pi : T^\star M \wedge T^\star M \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface $\pi(df, dg) = \{f, g\}$. En coordenadas locales x_i para M, comprobar que π está dado por

$$\pi = \sum_{i,j} \pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \; \pi^{ij} = -\pi^{ji} = \{x_i, x_j\},$$

y que para todo $f, g \in C^\infty(M)$ se cumple que

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Mostrar que la identidad de Jacobi es equivalente a la ecuación cuadrática

$$\sum_l \pi^{il} \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x_l} + \pi^{jl} \frac{\partial \pi^{ki}}{\partial x_l} + \pi^{kl} \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x_l} = 0.$$

Probar que para todo $f, g \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ campo de vectores, se cumple

$$\mathcal{L}_X \pi(df, dg) = \{Xf, g\} - \{f, Xg\} - X\{f, g\}.$$

Deducir que $\mathcal{L}_X \pi = 0$ si y sólo si X es una derivación para $\{\cdot, \cdot\}$, i.e. esta es otra forma equivalente de definir un campo de Poisson X. En el caso simpléctico, comprobar que en coordenadas simplécticas (q, p) se tiene que

$$\pi = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

La estructura de Poisson se dice *no-degenerada* si $\pi : T^\star M \longrightarrow TM$ es un isomorfismo; probar que este es *precisamente* el caso simpléctico (*Sugerencia: notar que* $\pi \circ dg = X_g$, *y deducir que* $\pi^{-1}(X) = i_X \omega$ *con* $\omega(X, Y) = (\pi^{-1}(X))(Y)$ *la forma simpléctica*).

(e) **(Foliación característica)** Dada una variedad de Poisson (M, π), con π el tensor de Poisson, definimos la *distribución característica* $\mathcal{D}^\pi \subset TM$ via

$$\mathcal{D}^\pi_p = \pi(T^\star_p M) \subset T_p M, \; p \in M.$$

Decimos que $p \in M$ es *regular* si $\mathcal{D}^\pi$ tiene rango constante en un entorno de p; sino, p es *singular*. Mostrar que $\mathcal{D}^\pi_p = \mathrm{span}\{X_f(p) : f \in C^\infty(U), \; p \in U \text{ abierto}\}$, i.e. la distribución característica está localmente generada por los campos Hamiltonianos. Mostrar que

$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$, i.e. $f \mapsto X_f$ es un morfismo de Lie. Usando el Teorema de Frobenius, concluir que $\mathcal{D}^\pi$ es integrable a lo largo de los puntos regulares, y que π es invertible a lo largo de las hojas maximales de la foliación resultante (que por lo tanto son subvariedades simplécticas), las cuáles son invariantes bajo el flujo de X_f para todo $f \in C^\infty(M)$, de forma maximal bajo inclusión.

Nota: Dado que la distribución característica es singular (su dimensión puede variar con $p \in M$), el teorema de Frobenius clásico no aplica directamente sobre los puntos singulares. De todas maneras, la siguiente versión si aplica:

Teorema (Teorema de Frobenius generalizado)**.** Ver e.g. [V94, Teorema 2.9”] Una distribución $\mathcal{D} \subset TM$ diferenciable es integrable si y sólo si existe una subálgebra de Lie χ de $\mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathcal{D}_p = \operatorname{span}\{X(p) : X \in \chi\}$ para todo $p \in M$ (i.e. $\mathcal{D}$ es *involutiva*), y para todo $p \in M, X \in \chi$, $\dim \mathcal{D}_{\phi^t_X(p)} = const.$, dónde ϕ^t_X es el flujo de X.

Utilizando esta versión, se obtiene la existencia de la foliación característica, cuyas hojas son simplécticas, pero tienen dimensión variable. Asumiendo este teorema, convencerse de que esto es cierto. Para esto, notar que los campos de vectores de Poisson generan flujos que son difeomorfismos de Poisson, i.e. difeomorfismos $\phi : M \longrightarrow M$ tal que $\phi^\star\{f,g\} = \{\phi^\star f, \phi^\star g\}$ para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

Si definimos una *subvariedad de Poisson* como $N \subset M$ subvariedad tal que $\pi(T^\star M|_N) \subset TN$, probar que las hojas N de la foliación característica son subvariedades de Poisson, y que la inclusión $\iota : N \hookrightarrow M$ es un morfismo de Poisson.

Un *elemento de Casimir* de M es $f \in C^\infty(M)$ tal que $X_f = 0$. Probar que f es de Casimir si y sólo si f es constante a lo largo de cada hoja (conexa) de la foliación característica de M.

(f) **(Estructura de Lie–Poisson)** Sea $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ un álgebra de Lie (posiblemente de dimensión infinita). Dada $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^\star)$, su derivada exterior en $\alpha \in \mathfrak{g}^\star$ induce por dualidad un elemento en $\mathfrak{g}$, i.e. $d_\alpha f \in (T_\alpha \mathfrak{g}^\star)^\star = (\mathfrak{g}^\star)^\star = \mathfrak{g}$. Luego, dadas $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^\star)$ podemos definir
$$\{f,g\}(\alpha) = -\alpha([d_\alpha f, d_\alpha g]).$$

Probar que esto define una estructura de variedad de Poisson en $\mathfrak{g}^\star$. Probar que hay una inyección $\mathfrak{g} \hookrightarrow C^\infty(\mathfrak{g}^\star)$ dada por $v \mapsto ev_v$, dónde $ev_v(\alpha) = \alpha(v)$ para $\alpha \in \mathfrak{g}^\star$, y que $\{ev_v, ev_w\} = ev_{[v,w]}$ para todo $v, w \in \mathfrak{g}$, i.e. el corchete de Poisson coincide con el corchete de Lie en $\mathfrak{g}$ (de hecho, está caracterizado por esta propiedad).

Deducir que, si $\mathfrak{g}$ tiene dimensión finita, $v_1, \ldots, v_n$ es una base, y $x_1, \ldots, x_n \in C^\infty(\mathfrak{g}^\star)$, $x_i = ev_{v_i}$, son las correspodientes funciones coordenadas en $\mathfrak{g}^\star$, se tiene que
$$\{x_i, x_j\} = \sum_j C^k_{ij} x_k,$$

dónde C^k_{ij} son las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ dadas por $[v_i, v_j] = \sum_j C^k_{ij} v_k$, y en general vale que
$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^n C^k_{ij} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

para todo $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^\star)$.

Sea G un grupo de Lie conexo, con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$, dónde $e \in G$ es el elemento neutro. Recordar que la representación adjunta de G en $\mathfrak{g}$ está dada por $\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ad}(g)(v) = d_e C_g(v)$, $g \in G, v \in \mathfrak{g}$, dónde $C_g : G \longrightarrow G$, $C_g(h) = ghg^{-1}$ es la conjugación por $g \in G$. Se cumple además que ad$= d_e\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}(v) = [v, \cdot]$, la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$. La representación co-adjunta es luego $\mathrm{Ad}^\star : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^\star)$, $\mathrm{Ad}^\star(g)(\alpha)(v) = \alpha(\mathrm{Ad}(g)^{-1}(v))$, $\alpha \in \mathfrak{g}^\star$. El campo de vectores infinitesimal $Y_v \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^\star)$ asociado a $v \in \mathfrak{g}$ se define cómo

$$Y_v(\alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}^\star(\exp(tv))(\alpha) \in T_\alpha \mathfrak{g}^\star = \mathfrak{g}^\star.$$

Notar que, por definición, el espacio tangente a las órbitas de la acción co-adjunta está generado por los Y_v, i.e. $T_\alpha \mathcal{O}(\alpha) = \mathrm{span}\{Y_v(\alpha) : v \in \mathfrak{g}\}$, dónde $\mathcal{O}(\alpha) = \{\mathrm{Ad}^\star(g)(\alpha) : g \in G\}$ es la G-órbita co-adjunta por $\alpha \in \mathfrak{g}^\star$.

Probar que $X_v = Y_v$, i.e. el campo de vectores Hamiltoniano de v coincide con el campo asociado a la acción infinitesimal de v. Probar que

$$\mathrm{span}\{X_f(\alpha) : f \in C^\infty(\mathfrak{g}^\star)\} = \mathrm{span}\{X_v(\alpha) : v \in \mathfrak{g} \subset C^\infty(\mathfrak{g}^\star)\},$$

i.e. el span de todos los campos Hamiltonianos está generado por aquellos campos Hamiltonianos asociados a las funciones lineales $\mathfrak{g}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ (que son necesariamente de la forma ev_v). Concluir que las hojas de la foliación característica de $\mathfrak{g}^\star$ coinciden con las G-órbitas co-adjuntas.

(g) **(Cohomología de Poisson)** Dada un álgebra de Poisson $(A, \{\cdot,\cdot\})$, un campo de vectores X sobre A se define como una derivación del producto de A; denotamos $\mathfrak{X}^1(A)$ el espacio de campos de vectores sobre A. Dado $f \in A$, definimos $\partial f := X_f := \{\cdot, f\} \in \mathfrak{X}^1(A)$, su *campo de vectores Hamiltoniano*. Dado $X \in \mathfrak{X}^1(A)$, definimos $\partial X \in \mathrm{Hom}(A \wedge A, A)$ via

$$\partial X(f,g) = \{Xf, g\} - \{f, Xg\} - X\{f,g\}.$$

Mostrar que efectivamente ∂X es alternada, i.e. $\partial X(f,g) = -\partial X(g,f)$, y es una derivación del producto de A en cada variable, i.e. ∂X es una *2-derivación* de A. Denotamos $\mathfrak{X}^2(A)$ el espacio de 2-derivaciones. Denotando $\mathfrak{X}^0(A) := A$, mostrar que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathfrak{X}^0(A) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^1(A) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^2(A) \\ & f & \mapsto & \partial f & & \\ & & & X & \mapsto & \partial X \end{array}$$

es un complejo de cadenas, i.e. la composición de dos mapas consecutivos es cero, y por lo tanto podemos definir la *cohomología de Poisson* de A como

$$H^i(A) := \frac{\ker(\partial : \mathfrak{X}^i(A) \longrightarrow \mathfrak{X}^{i+1}(A))}{\mathrm{Im}(\partial : \mathfrak{X}^{i-1}(A) \longrightarrow \mathfrak{X}^i(A))}, \ i = 0, 1.$$

Notar que $H^0(A)$ consiste de los elementos de Casimir de A, i.e. $f \in A$ tal que $\{f,g\} = 0$ para todo g. Notar que

$$H^1(A) = \frac{\mathfrak{X}^1_P(A)}{\mathfrak{X}^1_H(A)},$$

dónde $\mathfrak{X}^1_P(A) := \left\{X \in \mathfrak{X}^1(A) : X \text{ es de Poisson}\right\}$ y $\mathfrak{X}^1_H(A) := \{X_f : f \in A\}$. Si le llamamos a $\mathfrak{X}^1_H(A)$ el conjunto de las *derivaciones internas* de A, $H^1(A)$ parametriza las derivaciones *externas* de A.

Probar que $(H^0_P(A), \{\cdot,\cdot\})$ es una subálgebra de Lie de A. Probar que $\mathfrak{X}^1_P(A)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}^1(A)$ con respecto a el corchete de Lie $[X, Y] = XY - YX$. Notar que la identidad $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ implica que $\mathfrak{X}^1_H(A)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}^1(A)$. Más aún, probar que $\mathfrak{X}^1_H(A)$ es un ideal con respecto al corchete $[\cdot,\cdot]$; deducir que $(H^1(A), [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie.

Nota: Denotaremos por $H^i_\pi(M)$ la cohomología de Poisson de una variedad de Poisson (M, π).

(h) **(Caso simpléctico: cohomología de Poisson=cohomología de De Rham)** En el caso simpléctico dónde $(A, \{\cdot,\cdot\}) = (C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ es el álgebra de Poisson asociada a (M, ω), probar que

$$H^i(A) \cong H^i_{dR}(M),$$

dónde $H^i_{dR}(M)$ es la cohomología de De Rham de M, y el isomorfismo está dado, para $i = 0$, por la identificación

$$H^0(A) \cong \mathbb{R}^{\pi_0(M)} \cong H^0_{dR}(M),$$

dónde $\pi_0(M)$ es el conjunto de componentes conexas de M, y para $i = 1$, por el mapa

$$H^1(A) \longrightarrow H^1_{dR}(M),$$

$$[X] \longmapsto [i_X\omega].$$

Deducir nuevamente que el corchete de Lie $[\cdot,\cdot]$ en $\mathfrak{X}(M)$ induce una estructura en $H^1_{dR}(M)$ de álgebra de Lie.

Nota: Si bien definimos la cohomología de Poisson en grados $i = 0, 1$, también hay una definición en grados arbitrarios, y, en el caso simpléctico, se cumple $H^\star_{dR}(M) \cong H^\star_\pi(M)$.

Sugerencia: Para $i = 1$, probar que los campos de vectores de Poisson para $A = C^\infty(M)$ coinciden con los campos de vectores simplécticos, i.e. aquellos X que satisfacen $\mathcal{L}_X\omega = 0$, lo cuál es equivalente via la fórmula de Cartan a que $i_X\omega$ sea cerrada. Notar que $i_X\omega$ es exacta si y sólo si X es Hamiltoniano. Probar que dados dos campos de vectores simplécticos $X, Y \in \mathfrak{X}^1_P(A)$, se cumple $i_{[X,Y]}\omega = d(\omega(Y, X))$, i.e. $[X, Y] = X_{\omega(Y,X)}$. Esto implica directamente que $\mathfrak{X}^1_P(A)$ es cerrado por el corchete, y que $\mathfrak{X}^1_H(A)$ es un ideal.

(i) **(Ejemplos concretos)**

1. Si $\dim M = 2$, probar que *todo* bi-vector $\pi \in TM \wedge TM$ induce una estructura de Poisson. Describir la foliación característica de $\pi = f(x, y)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.

2. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera, y $h : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = z$ la función de altura. Describir la foliación característica de $h(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \theta}$, dónde θ es la coordenada angular en el plano (x, y). Mostrar que el ecuador $\{h = 0\}$ es una subvariedad de Poisson con la estructura de Poisson trivial (*i.e.* $\{\cdot,\cdot\} = 0$), y que el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial \theta}$ es de Poisson pero no es Hamiltoniano. Deducir que $H^1_\pi(S^2) \neq 0$, y por lo tanto π no induce una estructura simpléctica.

3. Probar que en $\mathbb{R}^n$, todo bi-vector constante, i.e. de la forma $\pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \pi^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ con (π^{ij}) matriz antisimétrica con coeficientes constantes, induce una estructura de Poisson.

4. Dada una 2-forma $\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(q) dq_i \wedge dq_j$ en $\mathbb{R}^n$, probar que el bi-vector

$$\pi_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_j}$$

induce una estructura de Poisson en $\mathbb{R}^{2n}$ si y sólo si $d\alpha = 0$. Generalizar al caso de cotangentes $(T^\star Q, \pi_{std})$ con la estructura de Poisson simpléctica π_{std}, i.e. dada $\alpha \in \Omega^1(Q)$ cerrada, describir el correspondiente π_α.

5. Sea $G = SO(3)$, con el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, que tiene una base $X, Y, Z \in \mathfrak{so}(3)$ con corchetes dados por $[X, Y] = Z, [Y, Z] = X, [Z, X] = Y$. Sea $X^\star, Y^\star, Z^\star \in \mathfrak{so}(3)^\star$ la base dual. Denotamos por (x, y, z) las coordenadas en la base dual. Comprobar que el bi-vector de la estructura de Lie–Poisson asociada es

$$\pi = z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x}.$$

Describir la foliación caracetrística. Probar que si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \in C^\infty(\mathfrak{so}(3)^\star)$, se cumple que $\{f, x\} = \{f, y\} = \{f, z\} = 0$.

Análogamente, si $G = SU(2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ con base $X, Y, Z \in \mathfrak{su}(2)$ y corchetes $[X, Y] = 2Z, [Y, Z] = 2X, [Z, X] = 2Y$, determinar el bi-vector de la estructura de Lie–Poisson asociada, y describir su foliación característica.

6. En coordenadas simplécticas (q, p) en $\mathbb{R}^6$, consideramos el momento angular $L = q \times p$. Probar que las componentes de $L = (L_1, L_2, L_3)$ satisfacen las relaciones

$$\{L_1, L_2\} = L_3,\ \{L_2, L_3\} = L_1,\ \{L_3, L_1\} = L_2,$$

y por lo tanto $(\mathrm{span}\{L_1, L_2, L_3\}, \{\cdot,\cdot\}) \cong \mathfrak{so}(3)$. Deducir que si dos de las componentes de L son constantes de movimiento para un Hamiltoniano H, la tercera lo es también. En general, mostrar que si f, g son integrales de H, $\{f, g\}$ también.

Nota: esta propiedad fue la motivación original de Poisson para introducir su corchete.

7. Consideramos la energía quinética de un cuerpo rígido, en coordenadas rotacionales (no inerciales), dado por

$$H(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{I_1} + \frac{x_2^2}{I_2} + \frac{x_3^2}{I_3}\right) \in C^\infty(\mathfrak{so}(3)^\star),$$

dónde $x = x_1 L_1^\star + x_2 L_2^\star + x_3 L_3^\star$ es el momento angular del cuerpo con $x_i = I_i \omega_i$, dónde I_i es el momento de inercia respecto del i-ésimo eje, y ω_i es la i-ésima componente de la velocidad angular.

Probar que las ecuaciones de Hamilton $\dot{x} = X_H(x)$ (con respecto a la estructura de Lie–Poisson en $\mathfrak{so}(3)$) son

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} x_2 x_3,\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} x_3 x_1,\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} x_1 x_2.$$

Estas son las famosas ecuaciones de Euler para sólidos rígidos.

References

[V94] Vaisman, I. (1994). Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds. doi:10.1007/978-3-0348-8495-2.