Dinámica Hamiltoniana y Geometría Simpléctica
Curso de Posgrado - 1er semestre 2021

Lista de Ejercicios n. 7

Ejercicio 1

(Integrabilidad, tensor de Nijenhuis, fibrados holomorfos y divisores, variedades de Kähler, de Weinstein y de Stein)

El objetivo de este práctico (de un solo ejercicio épico) es explorar ejemplos de variedades simplécticas de tipo algebraico, i.e. que provienen de la geometría algebraica compleja, y/o el análisis complejo, y por lo tanto son más "rígidas". Este tipo de variedades son los que normalmente aparecen cómo el espacio subyacente a la dinámica de los sistemas integrables, lo cuál vagamente justifica decir que éstos son "rígidos" o "algebraicos". También exploraremos las variedades de Weinstein, que son la versión simpléctica (y por lo tanto más "flexible") de variedades de Stein (la versión algebraica). En resumen, una variedad de Stein es una variedad compleja afín (i.e. propiamente encajada en $\mathbb{C}^n$); una variedad de Weinstein es aquella que se construye asociando asas de Weinstein y por lo tanto tienen una función de Morse para la cuál el campo de Liouville es un (pseudo)gradiente; una variedad de Stein es de Weinstein y además es compleja. Toda variedad de Weinstein es de Liouville, y toda variedad de Stein es Kähler. Toda variedad algebraica proyectiva (i.e. encajada en $\mathbb{C}P^n$) es Kähler. Uno puede obtener variedades de Stein de las variedades algebraicas proyectivas removiendo divisores algebraicos (i.e. el conjunto nulo de una sección de un fibrado de línea holomorfo en $\mathbb{C}P^n$). Toda superficie orientable con borde no vacío es Stein (ver el práctico anterior; aquí tendrán más herramientas).

Primero, empezamos con nociones básicas de la geometría compleja. Dos excelentes referencias introductorios son el libro de Huybrechts [Huy], y el clásico libro de Griffiths-Harris [GH]. Para aprender sobre variedades de Stein y Weinstein más en profundidad, recomiendo el libro de Cieliebak-Eliashberg [CE].

(0) **(Propiedad 2 de 3, estructura hermítica, notación compleja)** Probar que vale la siguiente igualdad de grupos de Lie:

$$U(n) = O(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}) = O(2n) \cap Sp(2n,\mathbb{R}) = GL(n,\mathbb{C}) \cap Sp(2n,\mathbb{R}),$$

dónde, si $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ es la rotación compleja estándar,

$$U(n) = \{U \in GL(2n,\mathbb{R}) \,:\, U^\star = U^{-1}\} \text{ es el grupo unitario ,}$$

$$O(2n) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) \,:\, A^t = A^{-1}\} \text{ es el grupo ortogonal,}$$

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) \,:\, A^t JA = J\} \text{ es el grupo simpléctico, y}$$
$$GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) \,:\, AJ = JA\} \text{ es el grupo de matrices complejas.}$$

Dada una variedad M de dimensión par, una estructura hermítica en M es una terna (g,ω,J) dónde g es una métrica Riemanniana, ω es una forma simpléctica, J es una estructura casi compleja (i.e. $J \in \mathrm{End}(TM)$, $J^2 = -\mathbb{1}$, esto es, una rotación compleja en las fibras), que satisfacen las siguientes condiciones de compatibilidad:

- $g = \omega(\cdot, J\cdot)$, $g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot,\cdot)$ (i.e. g es J-invariante);
- $\omega = g(J\cdot,\cdot)$, $\omega(J\cdot,J\cdot) = \omega(\cdot,\cdot)$ (i.e. ω es J-invariante);
- $J = (i_g)^{-1} \circ i_\omega$,

dónde

$$i_\omega \,:\, TM \longrightarrow T^\star M,\;\; i_\omega(v) = i_v\omega = \omega(v,\cdot),$$
$$i_g \,:\, TM \longrightarrow T^\star M,\;\; i_g(v) = i_v g = g(v,\cdot),$$

que son isomorfismos. La tupla (M,g,ω,J) se dice una *variedad Hermítica.* Deducir, de la igualdad de grupos de Lie dada arriba, que cualquier par de la terna (g,ω,J) determina el tercero excluído. Podemos luego decir que un elemento de la terna (g,ω,J) se dice *compatible* con otro elemento de la terna si se relacionan por las ecuaciones de arriba, y el tercero excluído es un tensor del tipo adecuado (e.g. J es compatible con ω si $g = \omega(\cdot,J\cdot)$ es una métrica J-invariante).

El fibrado tangente complejo de M es por definición $T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes \mathbb{C}$, i.e. la complexificación del fibrado tangente real $TM = T_{\mathbb{R}}M$. Comprobar que una terna hermítica es equivalente a dar una forma hermítica

$$h = g - i\omega,$$

i.e. $h(v,\overline{w}) = \overline{h(w,\overline{v})}$ para todo $v,w \in T_{\mathbb{C}}M$, y $h(v,\overline{v}) > 0$ para todo $v \neq 0$, $v \in T_{\mathbb{C}}M$, que además es J-invariante, i.e.

- $h(J\cdot,J\cdot) = h(\cdot,\cdot)$.

Comprobar que una estructura casi compleja J induce descomposiciones

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M,\;\; \Lambda_{\mathbb{C}}M := T^\star_{\mathbb{C}}M = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M,$$

dónde

$$T^{1,0}M = \{v - iJv \,:\, v \in T_{\mathbb{R}}M\},\;\; T^{0,1}M = \{v + iJv \,:\, v \in T_{\mathbb{R}}M\},\;\; T^{1,0}M = \overline{T^{0,1}M},$$

son respectivamente el espacio propio de J de valor propio i, y el de valor propio $-i$, y análogamente

$$\Lambda^{1,0}M = \{\alpha - iJ\alpha \,:\, \alpha \in T^\star_{\mathbb{R}}M\} = \{\lambda \in T^\star_{\mathbb{C}}M \,:\, \lambda(X) = 0, \text{ para todo } X \in T^{0,1}M\},$$

$$\Lambda^{0,1}M = \{\alpha + iJ\alpha \,:\, \alpha \in T^\star_{\mathbb{R}}M\} = \{\lambda \in T^\star_{\mathbb{C}}M \,:\, \lambda(X) = 0, \text{ para todo } X \in T^{1,0}M\},$$
$$\Lambda^{1,0}M = \overline{\Lambda^{0,1}M},$$

son respectivamente el espacio propio de J (actuando en $T^*_{\mathbb{C}}M$ via $J\lambda(v) = \lambda(Jv)$) de valor propio i, y el de valor propio $-i$. También tenemos una descomposición

$$\Lambda^k T_{\mathbb{C}} M = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} TM,$$

dónde $\Lambda^{p,q}TM = \bigwedge^p \Lambda^{1,0}M \otimes \bigwedge^q \Lambda^{0,1}M$, y vale que $\overline{\Lambda^{p,q}TM} = \Lambda^{q,p}TM$.

Una variedad compleja es una variedad (real) M que admite un sistema de cartas locales $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ con cambios de coordenadas $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ holomorfos. Comprobar que la ecuación de Cauchy-Riemann para $\varphi_{\alpha\beta}$ implica que $J = \varphi_\alpha^\star i = d\varphi_\alpha^{-1} \circ i \circ d\varphi_\alpha$, dónde $i \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ es la multiplicación por i, define una estructura casi-compleja J globalmente en M. Una estructura casi compleja $J \in \mathrm{End}(TM)$ obtenida de esta manera, i.e. inducida localmente por i, se dice *integrable*, o simplemente una *estructura compleja*. Una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión (real) dos.

Nota: no es cierto que toda variedad casi-compleja (M, J) admita una J' integrable. Pero si es cierto que toda variedad simpléctica es casi-compleja; ver lo que sigue. Variedades simplécticas complejas de gran interés son e.g. las variedades de Kähler.

Dada M variedad compleja, en coordenadas complejas locales $z_j = x_j + iy_j$, comprobar que vale

$$T^{1,0}M = \mathrm{span}\{\partial_{z_j} : j = 1, \dots, n\}, \ T^{0,1}M = \mathrm{span}\{\partial_{\overline{z}_j} : j = 1, \dots, n\},$$

$$\Lambda^{1,0}M = \mathrm{span}\{dz_j : j = 1, \dots, n\}, \ \Lambda^{0,1}M = \mathrm{span}\{d\overline{z}_j : j = 1, \dots, n\},$$

dónde

$$\partial_{z_j} = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j} - i\partial_{y_j}\right), \ \partial_{\overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j} + i\partial_{y_j}\right),$$
$$dz_j = dx_j + idy_j, \ d\overline{z}_j = dx_j - idy_j,$$

y que

$$\Lambda^{p,q}(M) = \mathrm{span}\{dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q} : 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n, 1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n\}.$$

Denotamos $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \Gamma(\Lambda^k T_{\mathbb{C}} M)$; vale que $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$, dónde $\Omega^{p,q}(M) = \Gamma(\Lambda^{p,q}M)$ el espacio de (p,q)-formas diferenciales de M. Sea $d : \Omega^k_{\mathbb{C}}(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}}(M)$ la extensión $\mathbb{C}$-lineal de la derivada exterior. Definimos los operadores de Dolbeaut

$$\partial : C^\infty(M) \longrightarrow \Omega^{1,0}(M) = \Gamma(\Lambda^{1,0}M), \ \overline{\partial} : C^\infty(M) \longrightarrow \Omega^{0,1}(M) = \Gamma(\Lambda^{0,1}M)$$

$$\partial = \pi^{p+1,q} \circ d|_{\Omega^{p,q}(M)}, \ \overline{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ d|_{\Omega^{p,q}(M)},$$

dónde $\pi^{p,q} : \Lambda^k T_{\mathbb{C}} M \longrightarrow \Lambda^{p,q}M$ es la proyección canónica. Comprobar que en coordenadas locales vale que

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j = \partial f + \overline{\partial} f,$$

si $f \in C^\infty(M)$, y deducir que f es holomorfa si y sólo si $\overline{\partial} f = 0$. Comprobar que

$$\partial(f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q},$$

$$\overline{\partial}(f\,dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{j_q}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_k}d\overline{z}_k\wedge dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

Comprobar que

$$d = \partial + \overline{\partial},\ \partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0,\ \overline{\partial}\partial = -\partial\overline{\partial},$$

y que satisfacen la ley de Leibnitz

$$\partial(\alpha\wedge\beta) = \partial\alpha\wedge\beta + (-1)^{p+q}\alpha\wedge\partial\beta,$$

$$\overline{\partial}(\alpha\wedge\beta) = \overline{\partial}\alpha\wedge\beta + (-1)^{p+q}\alpha\wedge\overline{\partial}\beta$$

si $\alpha\in\Omega^{p,q}(M)$, $\beta\in\Omega^{r,s}(M)$. Comprobar que la forma simpléctica estándar se escribe en coordenadas complejas cómo

$$\omega_{std} = \sum_{j=1}^{n} dx_j\wedge dy_j = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz_j\wedge d\overline{z}_j \in \Omega^{1,1}(M).$$

Comprobar que ω_{std} admite un *potencial plurisubharmónico* f, i.e. se escribe como

$$\omega_{std} = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}f = -dd^{\mathbb{C}}f,$$

dónde $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$, y $d^{\mathbb{C}}f = df\circ i$.

(1) **(Contractibilidad de $\mathcal{J}(M,\omega)$)** Dada una variedad simpléctica (M,ω), probar que el espacio $\mathcal{J}(M,\omega)$ de estructuras casi complejas J compatible con ω es no vacío y contraíble (con la topología C^∞). Análogamente, dada (M,J) variedad casi-compleja, probar que el espacio $\mathcal{W}(M,J)$ de formas simplécticas ω compatibles con J es no vacío y contraíble.

Sugerencia: la contractibilidad de $\mathcal{J}(M,\omega)$, $\mathcal{W}(M,J)$ es bastante no trivial, pero es un resultado estándar, debido a Gromov. Estudiarlo del libro de McDuff-Salamon [MS], que es la referencia estándar.

(2) **(Integrabilidad)** Dada una estructura casi compleja J en M, el *tensor de Nijenhuis* asociado a J es $N_J\in\mathrm{End}(TM\otimes TM, TM)$, dado por

$$N_J(v,w) = [v,w] + J[v,Jw] + J[Jv,w] - [Jv,Jw]\in TM,\ \ v,w\in TM.$$

Comprobar que N_J es efectivamente un tensor, i.e. N_J es $C^\infty(M)$-bilineal, que es alternado, i.e. $N_J(v,w) = -N_J(w,v)$, y J anti-invariante, i.e. $N_J(Jv,Jw) = -N_J(v,w)$. Comprobar que si J es integrable, vale que $N_J = 0$. Comprobar que $N_J = 0$ si y sólo si $T^{1.0}M$ (ó equivalentemente $T^{0,1}M$) es integrable como distribución, i.e. cerrada por el corchete de Lie.

Un resultado díficil del análisis complejo (que asumiremos sin prueba) es que también vale el recíproco:

Teorema 1 (Newlander-Nirenberg)**.** Una estructura casi compleja J es integrable si y sólo si $N_J = 0$.

(3) **(Dimensión dos)** Usando el teorema de Newlander-Nirenberg, probar que toda estructura casi compleja en una superficie es integrable. En otras palabras, toda superficie (Σ,j) con $j^2 = -\mathbb{1}$ es una superficie de Riemann, i.e. j es automáticamente una estructura compleja.

(4) **(Variedades de Kähler, variedades de Stein)** Una variedad de Kähler es una variedad hermítica (M, g, ω, J) dónde J es integrable. Probar que toda superficie orientable es Kähler. Probar que una subvariedad compleja de una variedad de Kähler es de Kähler con la estructura inducida por restricción.

(i) **(Variedades afines=variedades de Stein)** Probar que $(\mathbb{C}^n, g_{std}, \omega_{std}, i)$ es de Kähler. Probar que no existen subvariedades complejas *cerradas* de $\mathbb{C}^n$.

Sugerencia: usar el principio del máximo a las coordenadas $(z_1, \dots, z_n)$*, vistas como funciones en la subvariedad.*

Deducir que toda subvariedad compleja de $\mathbb{C}^n$ es abierta (i.e. tiene borde, o es no compacta). Una subvariedad compleja M de $\mathbb{C}^n$, propiamente encajada, es una *variedad de Stein*. Deducir que toda variedad de Stein es de Kähler.

Una definición alternativa es la siguiente: una variedad de Stein es una variedad compleja (M, J) que admite una función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

- f es *exhaustiva*, i.e. propia y acotada inferiormente; y
- f es *J-convexa* o *estrictamente plurisubharmónica*, i.e. $\omega_f = -dd^{\mathbb{C}}f$ es una forma simpléctica compatible con J, dónde $d^{\mathbb{C}} = df \circ J$.

Probar que la primera definición implica la segunda, con $f(z) = |z|^2$ restricta a M. El recíproco es un teorema debido a Grauert, Bishop y Narasimhan. Observar que a menos de perturbar f, podemos asumir que f es una función de Morse. Probar que el campo de gradientes de f con respecto de la métrica g_f inducida por ω_f y J es el campo de Liouville asociado a la primitiva $\lambda_f := -d^{\mathbb{C}}f$.

Si c es un valor regular de f, $M_c = \{f \leq c\}$ es un *dominio de Stein*. Probar que el borde $X_c := \partial M_c = f^{-1}(c)$ es una variedad de contacto con estructura de contacto

$$\xi = TX_c \cap JTX_c = \ker(\lambda_f|_{X_c}),$$

la *distribución de Levi*, o *distribución de tangencias complejas*. Luego X_c es el *borde estrictamente (pseudo)convexo* de M_c. Una variedad de contacto que es el borde estrictamente (pseudo)convexo de un dominio de Stein se dice *Stein-rellenable*, ó que admite un *relleno de Stein*. Deducir que un dominio de Stein es en particular un dominio de Liouville. Deducir que (S^{2n-1}, ξ_{std}) es Stein-rellenable, con relleno de Stein (B^{2n}, ω_{std}).

(Ejemplos concretos) La referencia para los ejemplos que siguen son las notas de Kwon-van Koert [KvK].

(A) **(Links de singularidades, variedades de Brieskorn)** Sea $p : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ una función holomorfa con una singularidad aislada en el origen. Definimos $V_0(p) = p^{-1}(0)$, una subvariedad singular de $\mathbb{C}^n$. El *link de la singularidad* es

$$L_{0,\delta}(p) = V_0(p) \cap S^{2n-1}_\delta,$$

dónde $S^{2n-1}_\delta = \partial B_\delta(0)$ y δ es suficientemente chico para que $L_{0,\delta}(p)$ sea una variedad. Denotamos $V^{cpt}_{0,\delta}(p) = V_0(p) \cap B_\delta(0)$, y por lo tanto $\partial V^{cpt}_{0,\delta}(p) = L_{0,\delta}(p)$. Probar que $L_{0,\delta}(p)$ admite una estructura de contacto $\xi_{0,\delta}(p)$ que es Stein-rellenable,

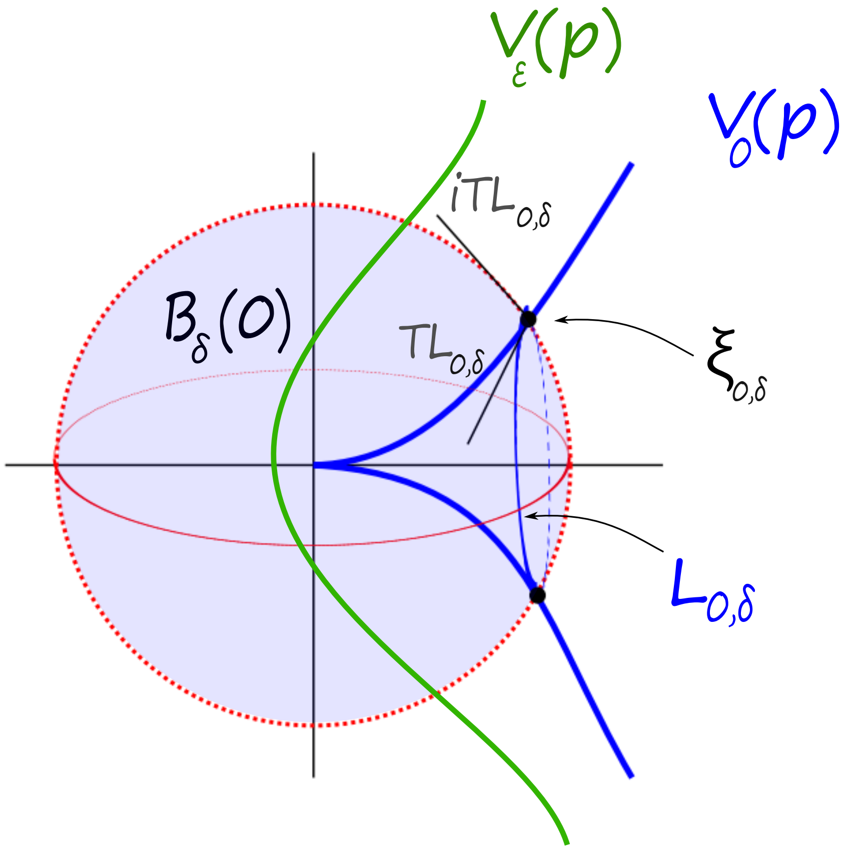

Figure 1: El link de la singularidad $L_{0,\delta}$ es una variedad de contacto Stein-rellenable.

dónde $\xi_{0,\delta}(p) = \ker \alpha_{std}|_{L_{0,\delta}(p)}$, con

$$\alpha_{std} = \frac{i}{2}\sum_{j=0}^{n} z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j$$

la forma de contacto estándar en S^{2n-1}_δ.

Sugerencia: Perturbar $V_0(p)$ a $V_\varepsilon(p) = p^{-1}(\varepsilon)$ con ε chico para que sea no singular en el origen, considerar $V^{cpt}_{\varepsilon,\delta}(p) = V_\varepsilon(p) \cap B^{2n}_\delta(0)$, y usar estabilidad de Gray (ó bien usar un chichón adecuado).

En el caso que $p(z) = \sum_{j=0}^n z_j^{a_j}$ con $a_j > 0$, la *variedad de Brieskorn* asociada es

$$V_\varepsilon(p) = p^{-1}(\varepsilon),$$

con ε chico. Probar que $a_j > 1$ para todo j si y sólo si $V_0(p)$ es singular, y si $a_i = 1$ para algún i, luego $(L_{0,\delta}(p), \xi_\delta(p))$ es contactomorfa a (S^{2n-3}, ξ_{std}).

(B) **(Cotangente de S^n)** Probar que si $p(z) = z_0^2 + \cdots + z_n^2$, y $V_1(p) = \{p(z) = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, el mapa

$$(V_1(p), \omega_{std}|_{V_1(p)}) \longrightarrow (T^\star S^n \subset T^\star\mathbb{R}^{n+1}, \omega_{std})$$
$$z = q + ip \longmapsto (\|q\|^{-1}q, \|q\|p)$$

es un simplectomorfismo que manda $V^{cpt}_{1,1} = V_1(p) \cap B^{2n}_1(0)$ a $D^\star S^n$, y cuya restricción a

$$L_{1,1}(p) = \partial V^{cpt}_{1,1}(p) = \{p(z) = 1,\ |z| = 1\}$$

es un contactomorfismo estricto

$$(L_{1,1}(p), \alpha_{std}) \longrightarrow (S^\star S^n, \lambda_{std}).$$

En otras palabras, $T^\star S^n$ es una variedad de Stein (una cuádrica en $\mathbb{C}^{n+1}$), $D^\star S^n$ es un dominio de Stein, y $S^\star S^n$ es Stein-rellenable.

(ii) **(Variedades proyectivas: forma de Fubini-Study)** Lo que sigues es estándar, pero puede e.g. consultar las notas [MF] que contiene incluso más información, y es más concreta que las referencias clásicas.

El espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$ admite una forma de Kähler ω_{FS}, la forma de Fubini-Study, definida como sigue. Sea

$$K : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$K(z) = \log\left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i|^2\right).$$

En coordenadas homogéneas $(\zeta_0 : \cdots : \zeta_n)$ para $\mathbb{C}P^n$, sea $U_\alpha = \{(\zeta_0 : \cdots : \zeta_n) : \zeta_\alpha \neq 0\}$ y sea

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$
$$\varphi_\alpha(\zeta_0 : \cdots : \zeta_n) = \left(\frac{\zeta_0}{\zeta_i}, \ldots, \frac{\zeta_{i-1}}{\zeta_i}, \frac{\zeta_{i+1}}{\zeta_i}, \ldots, \frac{\zeta_n}{\zeta_i}\right) = (z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)$$

las cartas locales estándar alrededor de $(0 : \cdots : 1 : \cdots : 0)$. Sea $K_\alpha = K \circ \varphi_\alpha$, y

$$\omega_\alpha = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}K_\alpha = \frac{i}{2\pi}\sum_{i,j=1}^n h_{ij}(z^\alpha) dz_i^\alpha \wedge d\overline{z}_j^\alpha.$$

Comprobar que

$$h_{ij}(z^\alpha) = \frac{\delta_{ij}\left(1 + \sum_{i=1}^n |z_i^\alpha|^2\right) - z_i^\alpha \overline{z}_j^\alpha}{(1 + \sum_{i=1}^n |z_i^\alpha|^2)^2}$$

Chequear que en los abiertos $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, tenemos que $\omega_\alpha = \omega_\beta$, y por lo tanto una $(1,1)$-forma global ω_{FS} de tal forma que $\omega_{FS}|_{U_\alpha} = \omega_\alpha$, y que admite el potencial plurisubharmónico (local) K_α.

Probar que $\int_L \omega_{FS} = 1$ a lo largo de toda línea $L \cong \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^n$ y deducir que $[\omega_{FS}] \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{R})$ es el generador de la cohomología de $\mathbb{C}P^n$.

Probar que $(\mathbb{C}P^n, J, \omega_{FS}, g_{FS})$ es Kähler, dónde J es la estructura compleja integrable inducida por las cartas estándar, g_{FS} es la métrica inducida por J y ω_{FS} es la forma de Fubini-Study. Deducir que toda variedad proyectiva (i.e. encajada en $\mathbb{C}P^n$) es Kähler. En particular, toda subvariedad $X = V(F) = \{(\zeta_0 : \cdots : \zeta_n) \in \mathbb{C}P^n : F(\zeta_0 : \cdots : \zeta_n) = 0\}$ dónde F es un polinomio homogéneo no singular, es Kähler.

(iii) **(fibrados holomorfos, fibrados de línea, divisores)** Un fibrado holomorfo de rango k es un fibrado diferenciable $\pi : E \longrightarrow X$ dónde E, X son variedades complejas, π es un mapa holomorfo, la fibra es un espacio vectorial complejo de dimensión (compleja) $k =: rk(E)$, y los mapas locales de transición son holomorfos (o equivalentemente el grupo de estructura admite una reducción de $GL(2k, \mathbb{R})$ a $GL(k, \mathbb{C})$). Probar que si M es variedad compleja, $T_{\mathbb{C}}M$, $T^\star_{\mathbb{C}}M$, $\Lambda^k_{\mathbb{C}}M$ son fibrados holomorfos.

En general, probar que que si E, F son fibrados holomorfos, $E \oplus F$, $E \otimes F$, $E^\star$, $\Lambda^k E$, $\det E := \Lambda^{rk(E)} E$, son fibrados holomorfos.

Un fibrado de línea holomorfo es un fibrado holomorfo de rango 1. Probar que si M es una variedad compleja, y $\mathrm{Pic}(M)$ es el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados de línea holomorfos sobre M, $\mathrm{Pic}(M)$ es un grupo con producto $L_1 \cdot L_2 = L_1 \otimes L_2$, inversa $L^{-1} = L^\star$, y elemento neutro $\mathcal{O} = M \times \mathbb{C}$. Este es el *grupo de Picard* de M.

Dado un fibrado de línea holomorfo $\pi : L \longrightarrow X$, con trivializaciones $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$, las funciones de transición son $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^\star$, dadas por

$$\varphi_{\alpha\beta}(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)v),$$

dónde $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son los mapas de transición. Probar que $g_{\alpha\beta}$ son un cociclo de Čech, i.e. $g_{\alpha\alpha} = 1$, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ y $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$. Probar que todo cociclo de Čech determina un fibrado de línea holomorfo, y dos cociclos de Čech determinan dos fibrados isomorfos si y sólo si difieren por un cociclo exacto, i.e. de la forma $(\partial f)_{\alpha\beta} = f_\alpha f_\beta^{-1}$ con $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^\star$. Esto da una identificación de $\mathrm{Pic}(X)$ con $H^1(X, \mathcal{O}^\star)$, el grupo de cohomología de Čech de X con coeficientes en el haz $\mathcal{O}^\star$ de funciones holomorfas no nulas en X.

(A) **(Fibrados de Serre $\mathcal{O}(k)$)** El espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$ admite un fibrado de línea holomorfo $\mathcal{O}(k)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, definido cómo sigue.

Si $U_\alpha = \{\zeta_\alpha \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$, y $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es como en el ejercicio anterior, con mapa de transición $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ definido en $U_{\alpha\beta}$, definimos $\pi_k : \mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ cómo el fibrado trivial en esta carta, i.e. $\mathcal{O}(k)|_{U_\alpha} \cong \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{C}$ via la trivialización $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \times id : U_\alpha \times \mathbb{C} \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{C}$, con mapas de transición

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \varphi_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \varphi_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{C},$$

$$\psi_{\alpha\beta}(z_1, \dots, z_n; z) = \left(\varphi_{\alpha\beta}(z_1, \dots, z_n) \; ; \left(\frac{z_\alpha}{z_\beta} \right)^k \cdot z \right).$$

Probar que efectivamente $\mathcal{O}(k)$ es un fibrado holomorfo, cuyas secciones holomorfas $\Gamma(\mathcal{O}(k))$ consiste precisamente de los polinomios homogéneos de grado k, si $k \geq 0$. Si $k < 0$, probar que $\mathcal{O}(k)$ no admite secciones holomorfas, pero sí admite secciones meromorfas con polos de orden a lo sumo k.

Identificar $\mathcal{O}(-1)$ con el *fibrado tautológico*, i.e. el subfibrado del fibrado trivial $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ cuya fibra sobre $l = (\zeta_0 : \cdots : \zeta_n)$ es la línea l en sí misma, i.e.

$$\mathcal{O}(-1) = \{((\zeta_0 : \cdots : \zeta_n), (\eta_0, \dots, \eta_n)) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \zeta_i \eta_j = \zeta_j \eta_i\},$$

también conocido como el *blowup* de $\mathbb{C}^{n+1}$ en el origen. Deducir que $\mathcal{O}(k)$ se puede pensar cómo el fibrado cuya fibra sobre l es $l^{\otimes -k}$ si $k < 0$, y $(l^\star)^{\otimes k}$ si $k > 0$. Identificar $\mathcal{O}(1)$ con el fibrado de línea asociado al fibrado de Hopf. Aquí, el fibrado de línea asociado a un S^1-fibrado principal $P \longrightarrow X$ es $L = P \times_{S^1} \mathbb{C}$, el cociente de $P \times \mathbb{C}$ por la acción de $G = S^1$ dada por $g \cdot (p, x) = (g \cdot p, g^{-1} \cdot x)$ (luego P se recupera de L, ya que es isomorfo a $P \times_{S^1} \times S^1 \subset L$).

Probar que $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ como grupos, dónde $k \in \mathbb{Z}$ se corresponde con $\mathcal{O}(k)$.

Nota: Esto último es no trivial.

(B) **(Divisores, de una variedad proyectiva a una variedad de Stein)** Una hipersuperficie (analítica) es una subvariedad compleja $Y \subset X$ de codimensión (compleja) 1, de una variedad compleja X. Un divisor es una combinación lineal formal $\sum_i a_i Y_i$ de hipersuperficies, con $a_i \in \mathbb{Z}$; para este ejercicio sólo consideraremos hipersuperficies, que son casos particulares de divisores. Una forma de conseguir tal divisor es considerar $s \in \Gamma(L)$ una sección holomorfa de un fibrado de línea holomorfo $L \longrightarrow X$, que es genérica en el sentido que es transversal a la cero sección, y considerar $Y = Z(s) = \{x \in X : s(x) = 0\} \subset X$.

Dada $X \subset \mathbb{C}P^n$ una subvariedad compleja (i.e. una variedad proyectiva), denotamos $\mathcal{O}_X(k) = \mathcal{O}(k)|_X$ (de tal forma que $\Gamma(\mathcal{O}_X)$, con $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(0)$, son las funciones holomorfas $X \longrightarrow \mathbb{C}$). Dada $s_k \in \mathcal{O}_X(k)$ una sección holomorfa genérica, s_k determina una trivialización de $\mathcal{O}_X(k)$ en $X_k := X \backslash Z(s_k)$. Probar que $(X_k, \omega_k = d\lambda_k)$ es una variedad de Stein, dónde $\lambda_k = -d^{\mathbb{C}} \log \|s_k\|^2$. Como caso particular, notar que $U_\alpha = \mathbb{C}P^n \backslash Z(s_1^\alpha)$ dónde $s_1^\alpha(\zeta_0 : \cdots : \zeta_n) = \zeta_\alpha$ es una sección de $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}P^n}$, $Z(s_1) \cong \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ es un divisor, y $\omega_1 = \omega_{FS}|_{U_\alpha}$.

(5) **(Curvatura, primer clase de Chern c_1)** Una métrica hermítica h en un fibrado de línea holomorfo $L \longrightarrow X$ es una elección diferenciable de métricas hermíticas en cada fibra de L. Dada una sección s de L, denotamos $\|s\|^2 = h(s, s)$. Dada s una sección local holomorfa s de L (que determina una trivialización local de L), definimos

$$F_h = -\frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log \|s\|^2$$

en esta trivialización local. Probar que esto define una $(1,1)$-forma $F_h \in \Omega^{1,1}(X)$ global, la *curvatura* de (L, h).

Si h es la métrica hermítica en $\mathcal{O}(-1)$ inducida por la métrica hermítica estándar en $\mathbb{C}^{n+1}$, deducir que la curvatura de $(\mathcal{O}(-1), h)$ es $-\omega_{FS}$. Más en general, probar que la curvatura de $(\mathcal{O}(k), h^{\otimes k})$ es $k\omega_{FS}$, dónde $h^{\otimes k}(s^{\otimes k}, s^{\otimes k}) = h(s, s)^k$, si $k \neq 0$.

La primer clase de Chern $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{R})$ es por definición $c_1(L) = [F_h]$. Probar que es independiente de h. Probar que $c_1 : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos. Probar que $c_1(\mathcal{O}(k)) = k$, bajo el isomorfismo $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ dónde ω_{FS} se corresponde con $1 \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto c_1 induce un isomorfismo $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$.

Nota: no es obvio que $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, i.e. que es integral; se puede asumir para este ejercicio.

Probar que en el caso de que X sea una superficie, c_1 coincide con la clase de Euler $e(L)$, definida cómo $e(L) = \#Z(s)$, i.e. el número algebraico (contado con signos) de los ceros de una sección s de L transversal a la cero sección. Usando esto, reprobar que $c_1(\mathcal{O}(k)) = k$ en el caso de $X = \mathbb{C}P^1 = S^2$, usando que los polinomios complejos de grado k, si $k \geq 0$, se anulan genéricamente en k puntos distintos (y los ceros cuentan con signo positivo). Notar que en dimensión (real) dos, una hipersuperficie regular es simplemente un conjunto finito de puntos, y un divisor simplemente le asigna multiplicidades a los puntos, lo cuál se puede pensar como las multiplicidades de los ceros/polos de una función meromorfa (dependiendo del signo).

(6) **(variedades de Weinstein)** Una *variedad de Weinstein* es una tupla (M, ω, V, f) dónde M es una variedad abierta (no compacta, ó con borde), ω es una forma simpléctica exacta, f :

$M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función exhaustiva y de Morse (generalizada), V es un campo de vectores de Liouville para ω, que es completo (su flujo existe para todo tiempo), y es un (pseudo-)gradiente para φ. Aquí, una función de Morse generalizada es aquélla que además de puntos críticos no degenerados, potencialmente admite puntos críticos degenerados de tipo *embriónico* o *muerte-nacimiento*, i.e. el punto crítico p admite coordenadas locales $x_1, \dots, x_m$ dónde $p = 0$ y $f = f_0$ en la familia $f_t(x) = f_t(0) \pm t x_1 + x_1^3 - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^m x_j^2$. Un campo de vectores V es un pseudo-gradiente para φ si $d\varphi(V) \geq \delta(\|V\|^2 + \|d\varphi\|^2)$ con $\delta : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ función positiva, y dónde la norma es con respecto a una métrica arbitraria. Notar que los puntos críticos de φ luego coinciden con los ceros de V, y un punto crítico es no degenerado (ó embriónico) para φ si lo es cómo cero de X.

Nota: Siempre se puede perturbar los puntos críticos embriónicos para hacerlos no degenerados, pero la definición está diseñada para estudiar familias a 1-parámetro, dónde estos puntos críticos son inevitables. En este ejercicio se pueden ignorar los puntos críticos embriónicos, incluídos en la definición sólo por completitud.

Deducir que toda variedad de Stein es Weinstein, y toda variedad de Weinstein es de Liouville. Probar que si Q es una variedad cerrada, luego $(\mathbb{D}^\star Q, \omega_{std})$ es Weinstein.

Probar que todo conjunto de nivel regular $\varphi^{-1}(c)$ hereda una estructura de contacto ξ_p. Probar que la variedad estable W_p^- (con respecto de V) de todo punto crítico p es isotrópica (en el sentido simpléctico, i.e. $\omega|_{W_p^-} = 0$) e intersecta todo conjunto de nivel regular $\varphi^{-1}(c)$ en una subvariedad isotrópica (en el sentido de contacto, i.e. tangente a ξ_p). Deducir que los puntos críticos de φ tienen índice a lo sumo n, y por tanto toda variedad de Weinstein (y en particular toda variedad de Stein) de dimensión real $2n$ es homotópicamente equivalente a un CW complejo de dimensión a lo sumo n.

Nota: un resultado profundo de Eliashberg dice que toda variedad de Weinstein se puede deformar a una variedad de Stein (y en particular existe una J integrable); este es uno de los resultados principales del libro [CE].

Un cobordismo de Weinstein es un cobordismo W orientable y diferenciable, i.e. una variedad con borde $\partial W = -M_- \bigsqcup M_+$, que tiene una estructura de Weinstein (con la única diferencia que la condición de que φ sea exhaustiva se reemplaza con que $M_\pm$ sean conjuntos de nivel regulares con $\varphi|_{M_-} = \min \varphi$, $\varphi|_{M_+} = \max \varphi$, y que V sea completo con que V sea entrante en M_- y saliente en M_+). Decimos que el cobordismo va de M_- a M_+. Deducir que $M_\pm$ heredan estructuras de contacto $\xi_\pm$. Un relleno de Weinstein es cuando $M_- = \emptyset$, y (M_+, ξ_+) se dice *Weinstein-rellenable*. Deducir que un cobordismo (relleno) de Weinstein es un cobordismo (relleno) de Liouville.

(A) Definir (o buscar en la literatura, e.g. el artículo original de Weinstein [Wei], la definición de) un asa de Weinstein de índice k, y deducir que toda variedad de Weinstein de dimensión $2n$ se construye asociando asas de Weinstein de índices $k \leq n$. Definir formalmente la suma conexa $(M_1 \# M_2, \xi_1 \# \xi_2)$ de dos variedades de contacto (M_i, ξ_i), $i = 1, 2$, cómo el resultado de asociar un asa de Weinstein de índice 1, y probar que existe un cobordismo de Weinstein de $(M_1, \xi_1) \bigsqcup (M_2, \xi_2)$ a $(M_1 \# M_2, \xi_1 \# \xi_2)$.

(B) Probar que si $(M_i, \xi_i) = \mathbf{OB}(P_i, \varphi_i)$, $i = 1, 2$, con P_i de Weinstein, vale que

$$(M_1 \# M_2, \xi_1 \# \xi_2) = \mathbf{OB}(P_1 \natural P_2, \varphi_1 \circ \varphi_2),$$

dónde $\natural$ denota la suma conexa de Weinstein del borde (el resultado de asociar una 1-asa de Weinstein a $P_1 \sqcup P_2$), y φ_1 conmuta con φ_2.

(C) Probar que si P es Weinstein, existe un cobordismo de Weinstein de $\mathbf{OB}(P, \varphi_1) \sqcup \mathbf{OB}(P, \varphi_2)$ a $\mathbf{OB}(P, \varphi_1 \circ \varphi_2)$.

Sugerencia: ver [Ad].

(7) **(Espacios de prequantización)** Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un S^1-fibrado principal sobre una variedad simpléctica (M, ω), y $\alpha \in \Omega^1(P)$ una conexión con curvatura ω, i.e. $d\alpha = \frac{i}{2\pi}\pi^\star \omega$, $\alpha(|_\theta) = 1$, dónde ∂_θ es el generador de la S^1-acción en las fibras, y α es S^1-invariante. Probar que α es una forma de contacto cuyo campo de Reeb es ∂_θ. La variedad de contacto (P, α) se llama una espacio (ó fibrado) de prequantización, y son relevantes para la quantización geométrica (hot topic hoy en día, en la interacción con la mecánica cuántica).

(i) **(Fibrado de Hopf)** Probar que el fibrado de Hopf $\pi : (S^3, \alpha_{std}) \longrightarrow (\mathbb{C}P^1 = S^2, \omega_{FS})$ es un espacio de prequantización, dónde ω_{FS} es la forma de Fubini-Study.

Más en general, Probar que $\mathcal{O}(k) \longrightarrow (\mathbb{C}P^1, k\omega_{FS})$ admite una estructura de espacio de prequantización, si $k \geq 1$, dónde abusamos notación y denotamos $\mathcal{O}(k)$ cómo el S^1-fibrado principal asociado al fibrado de línea holomorfo $\mathcal{O}(k)$.

(ii) **(Fibrado unitario de superficies, y libro abierto adaptado)** Sea Σ una superficie cerrada, orientable, con una métrica Riemanniana g. Consideramos el cotangente unitario $S^\star\Sigma$, y su fibrado de línea asociado $L = T^\star\Sigma$. Recordar que la clase de Euler $e(L) \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ se calcula cómo $e(L) = \#Z(s)$, dónde s es una sección de L transversal a la cero sección (y es independiente de s). Probar que $e(L) = -\chi(\Sigma)$, $e(L^\star) = e(T\Sigma) = \chi(\Sigma)$.

Probar que la forma de Liouville estándar α_{std} en $S^\star\Sigma$ es una forma de prequantización, i.e. satisface $d\alpha_{std} = \frac{i}{2\pi}\pi^\star\omega$ dónde $\omega \in \Omega^2(\Sigma, \mathbb{Z})$ es una forma de área en Σ (i.e. una forma simpléctica). Deducir que removiendo $|\chi(\Sigma)|$ puntos distintos de Σ, i.e. considerando $\dot{\Sigma} = \Sigma \backslash \{x_1, \dots, x_{|\chi(\Sigma)|}\}$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, obtenemos un fibrado trivial $S^\star\dot{\Sigma} \cong \dot{\Sigma} \times S^1 \longrightarrow \dot{\Sigma}$. Considerando discos disjuntos $D_i \cong \mathbb{D}^2$ centrados en los x_i, y denotando $\tilde{\Sigma} = \Sigma \backslash \cup_i D_i$, deducir que $(S^\star\Sigma, \xi_{std}) = \mathbf{OB}\left(\tilde{\Sigma}, \prod_{i=1}^{|\chi(\Sigma)|} \tau_i\right)$, dónde τ_i es el Dehn twist positivo a lo largo de ∂D_i.

Usando que $e(T^\star S^2) = -2$, removiendo el polo Norte y el polo Sur de S^2, reprobar que $(\mathbb{R}P^3, \xi_{std}) = \mathbf{OB}(D^\star S^1, \tau^2)$, con τ el Dehn twist a lo largo de la cero seción $S^1 \subset D^\star S^1$.

Nota: La contractibilidad de $\mathcal{J}(M, \omega)$ es el gran insight de Gromov, i.e. el espacio de J compatibles, para una variedad simpléctica dada, no tiene topología. Esto es fundamental a la hora de estudiar espacios de moduli de curvas J-holomorfas. En caso de que M sea además una variedad compleja (e.g. Kähler), uno primero intenta entender las curvas para el caso integrable (dónde la J es integrable), luego deforma la J en el espacio $\mathcal{J}(M, \omega)$, obteniendo información de los espacios de curvas para la J deformada, que puede estar muy lejos de ser integrable. La analogía con deformar un sistema dinámico integrable a un sistema caótico es clara. A diferencia de los métodos perturbativos, dónde sólo se perturba la dinámica en vez de considerar deformaciones "grandes" (por ej. la teoría de KAM), las curvas holomorfas sobreviven éstas deformaciones grandes. Lo que está detrás, y que gobierna la deformación, es el hecho de que la linearización de la ecuación de

Cauchy-Riemann es un operador de Fredholm, y los elementos de su núcleo satisfacen una EDP elíptica. Esto es lo que permite a Hofer-Wysocki-Zehnder obtener libros abiertos adaptados a la dinámica en la regularización de Levi-Civita del problema de los tres cuerpos (cuando tenemos convexidad, que en un principio es una propiedad no perturbativa). Más de esto en las clases que siguen... En otra dirección, más topológica que dinámica, una pregunta central en la topología de contacto, de intensa actividad actual, es determinar que estructuras de contacto admiten rellenos simplécticos (fuertes, débiles, de Liouville, Stein, Weinstein,...) y en caso afirmativo, cuántos (a menos de simplectomorfismo, difeomorfismo, equivalencia homotópica,...), y que estructuras de contacto se relacionan por cobordismos (fuertes, etc).

References

[Ad] Russell Avdek. Liouville hypersurfaces and connect sum cobordisms. ArXiv preprint arXiv:1204.3145.

[CE] Cieliebak, Kai; Eliashberg, Yakov. From Stein to Weinstein and back. Symplectic geometry of affine complex manifolds. American Mathematical Society Colloquium Publications, 59. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xii+364 pp. ISBN: 978-0-8218-8533-8

[MF] Mitchell Faulk, First Chern classes of Kähler manifolds. http://math.columbia.edu/ faulk/FirstChernClass.pdf

[GH] Griffiths, Phillip; Harris, Joseph. Principles of algebraic geometry. Reprint of the 1978 original. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. xiv+813 pp. ISBN: 0-471-05059-8.

[Huy] Huybrechts, Daniel. Complex geometry. An introduction. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. xii+309 pp. ISBN: 3-540-21290-6

[KvK] Kwon, Myeonggi; van Koert, Otto. Brieskorn manifolds in contact topology. Bull. Lond. Math. Soc. 48 (2016), no. 2, 173–241.

[MS] McDuff, Dusa; Salamon, Dietmar. Introduction to symplectic topology. Third edition. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2017. xi+623 pp. ISBN: 978-0-19-879490-5; 978-0-19-879489-9.

[Wei] Weinstein, Alan. Contact surgery and symplectic handlebodies. Hokkaido Math. J. 20 (1991), no. 2, 241–251.