# Dinámica Hamiltoniana y Geometría Simpléctica
# Curso de Posgrado - 1er semestre 2021

Lista de Ejercicios n. 2

Semana del 29 de marzo al 2 de abril

**Warning:** El tema de los signos a la hora de definir la forma de Liouville estándar, la forma simpléctica estándar, así como $X_H$, es un dolor de cabeza. A veces se define $i_{X_H}\omega = -dH$, pero hay que cambiar $-pdq$ por $pdq$ para la forma de Liouville $\lambda$; a veces se use la convención $\omega = -d\lambda$ ó bien se contrae la segunda variable $i_v\omega = \omega(\cdot, v)$. Ver el blog post de Wendl al respecto [Wendl]. Al final del día, lo relevante es embocarle a las ecuaciones de Hamilton con el signo que van. La convención (local, para este práctico) es $i_{X_H}\omega = \omega(X_H, \cdot) = dH$, $\lambda = -pdq$, $\omega = d\lambda = dq \wedge dp$. Suerte.

## Ejercicio 1

### (Campos de vectores de Liouville)

Dada una variedad simpléctica exacta $(M^{2n}, \omega = d\lambda)$, definimos un campo de vectores $V_\lambda$ asociado a la primitiva $\lambda$ por la ecuación

$$i_{V_\lambda}\omega = \lambda.$$

(a) Probar que $V_\lambda$ está bien definido, y que es un campo de vectores de Liouville, i.e. $\mathcal{L}_{V_\lambda}\omega = \omega$. Recíprocamente, probar que un campo de vectores $V$ es de Liouville si y sólo si $\lambda := i_V\omega$ satisface $d\lambda = \omega$.

Por lo tanto, fijada $\omega$, los campos de vectores de Liouville están en biyección con las primitivas de $\omega$, via $\lambda \leftrightarrow V_\lambda$.

(b) Probar que si $\Phi_\lambda^t$ es el flujo de $V_\lambda$, entonces $(\Phi_\lambda^t)^\star\lambda = e^t\lambda$, $(\Phi_\lambda^t)^\star\omega = e^t\omega$. En particular, $(\Phi_\lambda^t)^\star\omega^n = e^{nt}\omega^n$, i.e. el flujo de Liouville es una *dilatación simpléctica* (no preserva el volumen, sino que lo exponencia).

Comparar con el flujo Hamiltoniano: si $\Phi_H^t$ es el flujo Hamiltoniano de $H$, generado por $X_H$, recordar que $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$ (i.e. $(\Phi_H^t)^\star\omega = \omega$). Pero, no es necesariamente cierto que $\Phi_H^t$ preserva $\lambda$. En efecto, probar que $\mathcal{L}_{X_H}\lambda = d(\lambda(X_H) + H)$ y deducir $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$ de esta ecuación.

En particular, para $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std} = d\lambda_{std})$ con $\lambda_{std} = -pdq := -\sum_j p_j dq_j$, $\omega_{std} = dq \wedge dp := \sum_k dq_k \wedge dp_k$ en coordenadas $(q = (q_1, \dots, q_n), p = (p_1, \dots, p_n)) \in \mathbb{R}^{2n}$, mostrar que $\mathcal{L}_{X_H}\lambda = 0$ es equivalente a que $p\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial q} = p\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}$, lo cual impone serias restricciones a $H$. Chequear que esta EDP tiene soluciones $H$ no nulas.

(c) Si $\omega = d\lambda$, toda otra primitiva de $\omega$ se escribe como $\lambda' = \lambda + \eta$ con $d\eta = 0$. Probar que $V_{\lambda'} = V_\lambda + V$, dónde $V$ está únicamente determinado por la ecuación $i_V\omega = \eta$. En particular, si $\eta = dH$ es exacta (que siempre se cumple si $H^1(M) = 0$, e.g. $M = \mathbb{R}^{2n}$), luego $V = X_H$.

(d) Dada $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std} = dq \wedge dp)$, esta variedad se puede ver como $T^\star\mathbb{R}^n$ con la forma de Liouville estándar $\lambda = -pdq$. Alternativamente, podemos considerar la primitiva $\lambda' = \frac{1}{2}(qdp - pdq)$. Comprobar que los campos de Liouville asociados son, respectivamente, $V_\lambda = p\frac{\partial}{\partial p} := \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial p_j}$, y $V_{\lambda'} = \frac{1}{2}(q\frac{\partial}{\partial q} + p\frac{\partial}{\partial p}) := \frac{1}{2}\sum_j (q_j\frac{\partial}{\partial q_j} + p_j\frac{\partial}{\partial p_j})$, y calcular $H$ (a menos de constante) para el cual $\lambda' = \lambda + dH$.

(e) Concluir que la esfera $S^{2n-1} = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} : |q|^2 + |p|^2 = 1\}$, si bien no es transversal a $V_\lambda$, es transversal a $V_{\lambda'}$ y por lo tanto $(S^{2n-1}, \lambda'|_{S^{2n-1}})$ es una variedad de contacto (que induce la estructura de contacto *estándar* en $S^{2n-1}$ dada por $\xi := \ker \lambda'|_{S^{2n-1}}$).

# Ejercicio 2

**(Integrabilidad, Teorema de Frobenius, condición de contacto)**

Dada $M$ una variedad diferenciable, y $\xi \subset TM$ una distribución diferenciable, decimos que $\xi$ es *integrable* si para todo punto $p \in M$, existe una subvariedad diferenciable $N \subset M$ que contiene a $p$ y está definida en un entorno $U$ de $p$, tal que $T_qN = \xi_q$ para todo $q \in U$.

El Teorema de Frobenius, de la geometría diferencial, se puede enunciar de la siguiente manera.

**Teorema 1 (Frobenius).** Sea $M$ una variedad diferenciable, y $\xi \subset TM$ una distribución diferenciable. Luego $\xi$ es integrable si y sólo si para todo par de campos de vectores $X, Y : M \longrightarrow TM$ que toman valores en $\xi$ (i.e. $X(p) \in \xi_p \subset T_pM$ para todo $p$), se cumple que el corchete de Lie $[X, Y]$ también toma valores en $\xi$.

(a) **(Integrabilidad)** Sea $\xi \subset TM$ una distribución de hiperplanos, i.e. $\xi_p \subset T_pM$ tiene codimensión 1 para todo $p \in M$. Luego, al menos localmente en un abierto $U$, $\xi$ puede escribirse cómo $\xi = \ker\alpha$ para una 1-forma $\alpha \in \Omega^1(U)$. Probar que la condición de integrabilidad dada por el teorema de Frobenius es equivalente a la condición $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$, i.e. $d\alpha|_\xi \equiv 0$.

*Sugerencia: recordar la siguiente ecuación para la derivada exterior de* 1*-formas:*

$$d\alpha(X,Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]),$$

*para* $X, Y$ *campos de vectores.*

(b) **(condición de contacto = no integrabilidad maximal)** En el caso que $M$ tiene dimensión $2n+1$, observar que la condición de contacto para $\xi = \ker\alpha$, dada por $\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0$, es equivalente a $d\alpha|_\xi$ es una forma simpléctica, i.e. $(\xi, d\alpha|_\xi)$ es una *distribución simpléctica.* Comparar con la condición de integrabilidad de la parte (a), que es exactamente la condición opuesta.

(Esto justifica decir que una estructura de contacto $\xi$ es no integrable de forma *maximal.*).

(c) **(Variedades isotrópicas, y Legendrianas)** Sea $(M^{2n+1}, \xi)$ una variedad de contacto, y sea $N \subset M$ una subvariedad tangente a la estructura de contacto, i.e. $TN \subset \xi$. Probar que la dimensión de $N$ es *a lo sumo n.*

Una variedad $N$ tangente a $\xi$ se llama *isotrópica*. Si además $\dim N = n$, $N$ es *Legendriana*.

(En otras palabras, la condición de contacto es también maximalmente no integrable en el sentido de que las subvariedades isotrópicas tienen dimensión muy "chica").

*Sugerencia: si $N$ es isotrópica, entonces $T_pN \subset (\xi_p, d\alpha_p)$ es un subespacio isotrópico del espacio vectorial simpléctico $(\xi_p, d\alpha|\xi_p)$ de dimensión $2n$, para todo $p$. Luego, las Legendrianas se corresponden con los subespacios Lagrangianos.*

# Ejercicio 3

**(Espacio de elementos de contacto, espacios de 1-Jets, contactización, transformaciones de contacto)**

Historia: Las transformaciones de contacto fueron definidas por Sophus Lie, cómo caso particular de transformaciones locales definidas por las integrales de un sistema de ecuaciones diferenciales. Esto puede decirse es dónde surge la *geometría* de contacto, que luego se estudió ampliamente a finales del siglo IXX y principios de siglo XX. La *topología* de contacto, i.e. el estudio abstracto y topológico de las variedades de contacto, es más reciente y de intensa actividad actual. Visitemos pues, los orígenes. Lo que sigue está basado en un artículo expositorio de Geiges [G01] (lectura recomendada).

**Espacio de elementos de contacto.** Siguiendo una definición de Lie, un *elemento de contacto* en $\mathbb{R}^2$ es un par $(q = (x, z), l)$ dónde $q \in \mathbb{R}^2$ y $l \subset R^2$ es una línea que contiene a $q$. Si la pendiente $p$ de $l$ es finita, la ecuación de esta recta se escribe

$$dz - pdx = 0.$$

En otras palabras, el espacio de elementos de contacto se corresponde con la variedad de contacto estándar $(\mathbb{R}^3, dz - pdx)$, con coordenadas $(z, x, p)$. Dada una curva $z = z(x)$ de regularidad $C^1$, esta induce una subvariedad Legendriana (i.e. de dimensión 1, ver ej. anterior), parametrizada via

$$x \longmapsto (x, z(x), p = z'(x)) \in \mathbb{R}^3.$$

De hecho, toda subvariedad Legendriana puede parametrizarse (localmente y a menos de reordenar coordenadas) así. En particular, dada una ecuación diferencial $F(x, z, z') = 0$ de orden 1, una solución $z = z(x)$ induce una subvariedad Legendriana en $\mathbb{R}^3$.

De forma similar, en dimensiones más altas, decimos que un elemento de contacto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ es un par $(q = (x_1, \dots, x_n, z), H)$ dónde $H \subset \mathbb{R}^n$ es un hiperplano que contiene a $q$.

(a) Identificar el espacio de elementos de contacto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con la variedad de contacto estándar $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}, \alpha_{std} = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i)$, dónde $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ (que se asume finita). Interpretar las subvariedades isotrópicas en términos de ecuaciones diferenciales de orden 1 dadas por $F(x, z(x), z'(x)) = 0$ para funciones $z : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Espacio de 1-jets y contactización.** De forma más abstracta y global, dada una variedad $Q$ de dimensión $n$, su *fibrado de* 1*-jets* es el fibrado $J^1(Q) \longrightarrow Q$ cuyo espacio total consiste de todas las posibles derivadas de orden 1 de (gérmenes de) mapas $z : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, y cuya fibra sobre $q \in Q$ es la colección de tuplas $J^1(Q)_q = \{J^1_z(q) = (q, z(q), d_q z) \in Q \times \mathbb{R} \times T^\star_q Q : z \in C^1(U, \mathbb{R}), q \in U \subset Q \text{ abierto}\}$.

(b) Mostrar que $J^1(Q) \cong T^\star Q \times \mathbb{R}$, y que es una variedad de contacto con forma de contacto $\alpha_Q = dz + \lambda_{std}$, dónde $\lambda_{std}$ es la forma de Liouville estándar en $T^\star Q$.

(c) En analogía al caso de fibrados cotangentes, mostrar que toda elección de coordenadas locales en $Q$ induce coordenadas de Darboux para $(J^1(Q), \alpha_Q)$, i.e. localmente $(J^1(Q), \alpha_Q) \cong (J^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}, \alpha_{std})$.

(d) **(Contactización)** En general, dada una variedad simpléctica exacta $(M, \omega = d\lambda)$, mostrar que su *contactización* $(M \times \mathbb{R}, dz + \lambda)$ es una variedad de contacto. Dadas coordenadas simplécticas para $M$, concluir que esto induce coordenadas de Darboux para su contactización.

(e) Mostrar que las soluciones a una ecuación diferencial $F(q, z(q), d_q z) = 0$ induce subvariedades isotrópicas de $J^1(Q)$.

**Transformaciones de contacto.** Dado un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, z, p) = (x_1, z_1, p_1)$, decimos que $f$ es una *transformación de contacto* si $dz - p\,dx = \rho(dz_1 - p_1 dx_1)$ para una función $\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ estrictamente positiva. En otras palabras, $f^\star \alpha_{std} = \rho \alpha_{std}$, y en particular $f$ preserva la estructra de contacto, i.e. $f_\star(\xi_{std}) = \xi_{std}$, dónde $\xi_{std} = \ker \alpha_{std}$. Por lo tanto, $f$ transforma las Legendrianas inducidas por soluciones de una ecuación diferencial $F(x, z, z') = 0$ a Legendrianas inducidas por las soluciones de la ecuación transformada $F_1(x_1, z_1, z_1') = 0$.

(f) **(Dilataciones)** Dada una curva $\gamma : x \mapsto (x, z(x)) \in \mathbb{R}^2$ con $z \in C^1(\mathbb{R})$, sea $\beta(x_1) = (x_1, z_1(x_1))$ una de las dos posibles curvas paralelas a $\gamma$ a distancia $k \in \mathbb{R}^+$, dadas por las ecuaciones
$$\begin{cases} (x_1 - x)^2 + (z_1 - z)^2 &= k^2 \\ \langle \gamma_1(x_1) - \gamma(x), \gamma'(x) \rangle &= 0 \\ \gamma_1'(x_1) &= \gamma'(x). \end{cases}$$
Definiendo $p = \gamma'(x)$, $p_1 = \gamma_1'(x_1)$, probar que el mapa $f(x, z, p) = (x_1, z_1, p_1)$ es una transformación de contacto (una *dilatación*).

(g) **(Transformada polar)** La siguiente construcción es una versión de contacto de una construcción clásica que se remonta a Apollonius.

Sea $C$ el círculo unitario en el plano $(x, z)$, dado por la ecuación $x^2 + z^2 - 1 = 0$. Dado un punto arbitrario $(x, z)$ en el exterior de $C$, hay dos únicas rectas por $(x, z)$ que son tangentes a $C$. La recta que pasa por los puntos de tangencia (la recta *polar* de $(x, z)$) está dada por la ecuación $xx_1 + zz_1 - 1 = 0$, dónde los parámetros libres son $(x_1, z_1)$. Si $(x, z)$ se mueve en una recta $R = \{ax + bz - 1 = 0\}$, las correspondientes polares se intersectan en el punto $(x_1, z_1) = (a, b)$, el *polo* de la recta $R$. Asumiendo $b \neq 0$, su pendiente es $p = -\frac{a}{b} = -\frac{x_1}{z_1}$. Dada una curva $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ uno puede asociarle su *transformada polar* $\gamma_1(t) = (x_1(t), z_1(t))$ definida por la condición de que $\gamma_1(t)$ es el polo de $\gamma'(t)$. La situación es claramente simétrica en $(x, z)$ y $(x_1, z_1)$, y por lo tanto la transformada polar de $\gamma_1$ es $\gamma$. En coordenadas $(x, z, p = \frac{dz}{dx})$, la transformada polar está dada por
$$(x, z, p) \mapsto (x_1, z_1, p_1),$$
inducida (implícitmente) por las ecuaciones
$$\begin{cases} xx_1 + zz_1 - 1 &= 0 \\ p &= -\frac{x_1}{z_1} \\ p_1 &= -\frac{x}{z}. \end{cases}$$
Probar que la transformada polar es una transformación de contacto.

# Ejercicio 4

**(Transformaciones de contacto, Hamiltonianos de contacto, flujos de Reeb)**

Recordemos que un Hamiltoniano $H$ en una variedad simpléctica tiene un campo de vectores Hamiltoniano asociado, $X_H$, cuyo flujo preserva $\omega$ y por lo tanto toda la geometría simpléctica asociada. En el contexto de la geometría de contacto, hay una situcación análoga, como sigue.

Dada una variedad de contacto $(M, \xi)$, una transformación de contacto de $M$ es un difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ que satisface $f_\star(\xi) = \xi$. Fijada una forma de contacto $\alpha$ para $\xi$, esta condición es equivalente a $f^\star\alpha = \rho\alpha$ dónde $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente positiva; esta condición es independiente de la forma de contacto (Probar esto como calentamiento). Fijada $\alpha$, la transformación de contacto $f$ se dice *estricta* si $f^\star\alpha = \alpha$.

La versión infinitesimal es la siguiente: dado un campo de vectores $X$ en $M$, decimos que es un automorfismo infinitesimal (estricto) de $\xi$ si su flujo local es una transformación de contacto (resp. estricta). Equivalentemente, dada $\alpha$, $\mathcal{L}_X\alpha = \nu\alpha$ con $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable (resp. $\nu = 0$); condición que no depende de $\alpha$.

Dado $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable (un *Hamiltoniano de contacto*), el campo de vectores asociado es $X_H$, definido por las ecuaciones

$$\alpha(X_H) = H, \;\; i_{X_H}d\alpha = dH(R_\alpha)\alpha - dH,$$

dónde $R_\alpha$ es el campo de Reeb de $\alpha$. Notar que $R_\alpha = X_1$, i.e. asociado a la función constante $H \equiv 1$.

(a) Fijada $\alpha$, probar que hay una correspondencia bien definida y biyectiva entre automorfismos infinitesimales $X$ de $\xi = \ker\alpha$, y funciones diferenciables $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$X \longmapsto H = \alpha(X), \;\; H \longmapsto X_H,$$

de tal forma que $H \equiv 1 \leftrightarrow R_\alpha$.

Notar que, a diferencia del caso simpléctico dónde el Hamiltoniano simpléctico $X_H$ depende de $H$ sólo a menos de constantes, ésto no es cierto en el caso de Hamiltonianos de contacto.

(b) Si $\alpha$ ahora no está fija, probar que todo automorfismo infinitesimal de $\xi$, que es no nulo en todo punto, es el campo de vectores de Reeb de *alguna* forma de contacto para $\xi$.

# Ejercicio 5

**(Óptica: principio de Huygens. Referencia: Libro de Geiges [G08])**

Cuando la luz se propaga por un medio $B$ (ó bien una onda vibracional se propaga por e.g. el agua), el *frente de onda* $F_b(t)$ de un punto $b \in B$ en tiempo $t$ es el conjunto de puntos de $B$ al cual la luz puede viajar en tiempo $t$ desde $b$, y $t$ es el mínimo tiempo con esa propiedad. El famoso *principio de Huygens* dice que el frente de onda $F_{b_0}(t_0 + t)$ es la envolvente de los frentes de onda $F_b(t)$, con $b \in F_{b_0}(t_0)$; ver la Figura 1. Formalizaremos dicho principio en el lenguaje de la geometría de contacto.

Sea $(B, g)$ una variedad Riemanniana orientada, que será un modelo para el medio; las geodésicas de $g$ representan los rayos de luz. El espacio de *elementos de contacto (coorientados)* es la

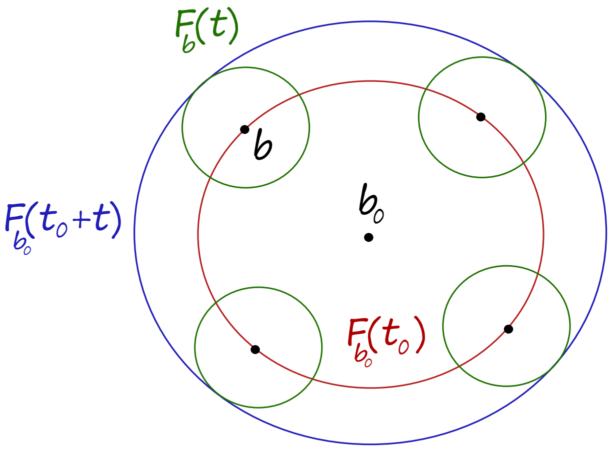


Figure 1: El principio de Huygens.

colección $\mathcal{C}B$ de pares $(b, H)$, dónde $b \in B$, y $H \subset T_b B$ es un hiperplano coorientado. Dada $g$, esto induce una identificación entre $\mathcal{C}B$ y el tangente unitario $SB$, mandando $(b, H)$ al único vector unitario $v_H \in S_b B$ que es positivamente ortogonal a $H$, acorde a la coorientación de $H$. También tenemos la identificación dual $\mathcal{C}B \cong S^\star B$, que manda $(b, H)$ a $p_H = g_b(v_H, \cdot) \in S_b^\star B$. Esto induce una estructura de contacto en $\mathcal{C}B$, inducida por la forma de Liouville estándar en $S^\star B$. Sea $\Phi_t$ el flujo de Reeb (i.e. el flujo (co)geodésico) en $S^\star B$.

(a) Probar que el flujo de Reeb inducido en $\mathcal{C}B$ está dado por $\Phi_t(b, H) = (\gamma(t), H(t))$, dónde $\gamma$ es la única geodésica tal que $\gamma(0) = b$ y $\dot{\gamma}(0) = v_H$, y $H(t) \subset T_{\gamma(t)}B$ es el único hiperplano tal que $\dot{\gamma}(t) = v_{H(t)}$.

*Sugerencia: recordar que el flujo geodésico preserva la métrica.*

(b) Mostrar que la fibra $\mathcal{C}_b B := \pi^{-1}(b)$ del fibrado $\pi : \mathcal{C}B \longrightarrow B$, $\pi(b, H) = b$, es una subvariedad Legendriana de $\mathcal{C}B$. Deducir que $\Phi_t(\mathcal{C}_b B)$ es también Legendriana.

*Sugerencia: recordar la definición intrínsica de la forma de Liouville estándar, y recordar que el flujo de Reeb es una transformación de contacto.*

(c) Dadas dos subvariedades Legendrianas $L_0, L_1 \subset \mathcal{C}B$ que se intersectan en $(b, H) \in \mathcal{C}_b B$, tal que las *proyecciones frontales* $\pi(L_0), \pi(L_1)$ son hipersuperficies diferenciables cerca de $b \in \pi(L_0) \cap \pi(L_1)$, probar que $\pi(L_0)$ y $\pi(L_1)$ son tangentes una a la otra en $b$.

*Sugerencia: Esto es consecuencia de la definición geométrica de la estructura de contacto, i.e. en particular notar que $H = \ker p_H$, y que la forma de Liouville en un punto $(b, p)$ es aplicar $p \circ d\pi$. Deducir que $T_b \pi(L_i) = H$, $i = 1, 2$.*

(d) Deducir:

(Principio de Huygens) Sea $\gamma$ una geodésica con $|\dot{\gamma}| = 1$. Si $b_0 = \gamma(0)$ y $t_0, t > 0$ son tal que $F_{b_0}(t_0 + t)$ y $F_b(t)$, con $b = \gamma(t)$, son hipersuperficies diferenciables cerca de $b_1 = \gamma(t_0 + t) \in F_{b_0}(t_0 + t) \cap F_b(t)$, entonces son tangentes en $b_1$.

*Sugerencia: Observar que $F_b(t) = \pi(\Phi_t(\mathcal{C}_b B))$.*

# References


[G01] Geiges, Hansjörg. A brief history of contact geometry and topology. Expo. Math. 19 (2001), no. 1, 25–53.

[G08] Geiges, Hansjörg. An introduction to contact topology. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 109. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. xvi+440 pp. ISBN: 978-0-521-86585-2

[Wendl] Wendl, Chris. Signs, or how to annoy a symplectic topologist, blog post: https://symplecticfieldtheorist.wordpress.com/2015/08/23/signs-or-how-to-annoy-a-symplectic-topologist/