

Dinámica Hamiltoniana y Geometría Simpléctica

Curso de Posgrado - 1er semestre 2021

Lista de Ejercicios n. 6

Ejercicio 1

(Simplectización, cobordismos y rellenos simplécticos)

Nota: Nosotros hemos considerado sólo estructuras de contacto co-orientables, i.e. $\xi = \ker \alpha$ globalmente con α forma de contacto, pero también existen estructuras de contacto que pueden escribirse como $\xi = \ker \alpha$ sólo localmente. Tal es el caso del espacio de elementos de contacto no co-orientados de una variedad M , i.e. la colección CB de pares (p, H) tal que $p \in M$ y $H \subset T_p M$ hiperplano. Comparar con el ejercicio 5 del Práctico 2. En este ejercicio, a menos que se diga lo contrario, ξ es no necesariamente co-orientable.

Dada una variedad (M, ξ) con una distribución diferenciable de hiperplanos $\xi \subset TM$, definimos

$$S_\xi M = \text{Ann}(\xi) = \bigcup_{p \in M} (S_\xi M)_p,$$

dónde

$$(S_\xi M)_p = \{ \alpha_p \in T_p^* M : \ker \alpha_p = \xi_p \} = \text{Ann}(\xi_p).$$

- (1) Probar que $S_\xi M$ es una subvariedad simpléctica de $(T^* M, \omega_{std})$ si y sólo si ξ es una estructura de contacto, en cuyo caso $S_\xi M$ es una variedad simpléctica exacta con forma simpléctica $\omega_\xi = \omega_{std}|_{S_\xi M}$. Dada esta situación, $S_\xi M$ es la *simplectización* de ξ .

Probar que la restricción de la proyección $\pi : T^* M \rightarrow M$ a $S_\xi M$ le da estructura a $S_\xi M$ de un \mathbb{R}^* -fibrado principal $S_\xi M \rightarrow M$, con acción dada por $\lambda \cdot \alpha = \lambda \alpha$, $\lambda \neq 0$. Comprobar que el generador infinitesimal de la \mathbb{R}^* -acción, definido como $V \in \mathfrak{X}(S_\xi M)$, $V(\alpha) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (t \cdot \alpha)$, es simplemente la restricción a $S_\xi M$ del campo radial de Liouville en $T^* M$.

- (2) Probar que si ξ es co-orientable (i.e. podemos escribir $\xi = \ker \alpha$ globalmente), una forma de contacto α determina una trivialización simpléctica de $S_\xi M$ como \mathbb{R}^+ -fibrado principal, i.e. tenemos un simplectomorfismo

$$(S_\xi M, \omega_\xi) \cong (\mathbb{R}^+ \times M, d(r\alpha)) \cong (\mathbb{R} \times M, d(e^t \alpha)),$$

dónde el último isomorfismo está dado por el cambio de variable $r = e^t$, y dónde $V = \partial_t$ es el campo de Liouville en estas coordenadas. Recordando que toda otra forma de contacto se escribe como $\alpha_f = e^f \alpha$ con $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, probar que la variedad de contacto *estricta* (M, α_f) se puede ver como una hipersuperficie de contacto en la trivialización de $S_\xi M$ dada por α . Más explícitamente, como el gráfico de f , dado por

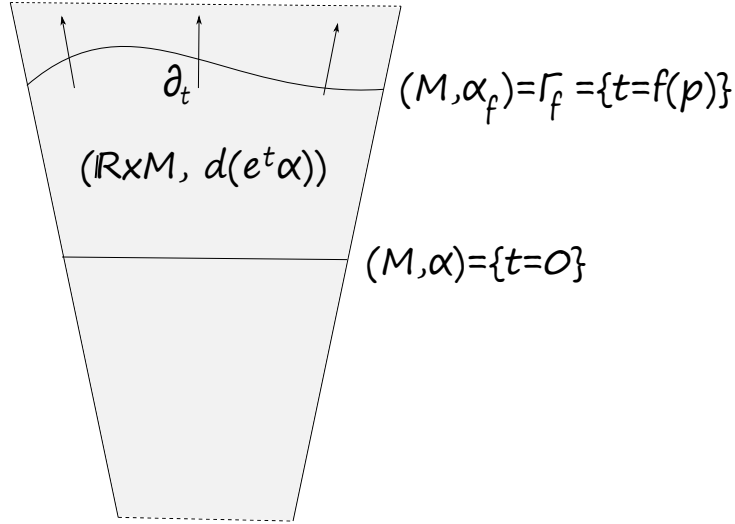


Figure 1: La simplectización $S_\xi M$. Toda otra forma de contacto en M es una hipersuperficie de contacto en la α -trivialización de $S_\xi M$.

$\Gamma_f = \{(t = f(p), p) : p \in M\} \subset (\mathbb{R} \times M, \omega = d(e^t \alpha))$, y vale que $\alpha_f = i_{\partial_t} \omega|_{\Gamma_f}$. En particular, si $f \equiv t_0 \in \mathbb{R}$ es constante, el campo Reeb en $\{t = t_0\}$ es $R_{t_0} = e^{-t_0} R_\alpha$, i.e. la dinámica no cambia.

- (3) Probar que la simplectización es el entorno “universal” de toda hipersuperficie de contacto, i.e. si $(M, \alpha = \lambda|_M) \subset (X, \omega)$ es una hipersuperficie, dónde $\omega = d\lambda$ en un entorno de M , que es transversal al campo de Liouville V determinado por λ , entonces existe un encaje simpléctico

$$\Phi : ((-\varepsilon, \varepsilon) \times M, d(e^t \alpha)) \hookrightarrow (X, \omega),$$

con $\Phi(\{0\} \times M) = M \subset X$, y $\varepsilon > 0$ suficientemente chico.

Sugerencia: usar el flujo de Liouville.

- (4) **(Cobordismos y rellenos simplécticos)** Dadas dos variedades de contacto (M_+, ξ_+) y (M_-, ξ_-) orientadas y co-orientables, un *cobordismo simpléctico* (fuerte) de M_- a M_+ es una variedad simpléctica (X, ω) que satisface:

- $\partial X = M_+ \sqcup -M_-$ como variedades orientadas, dónde la orientación en X está inducida por ω , ∂X tiene la orientación borde, y $-M_-$ es M_- con la orientación opuesta;
- $\omega = d\lambda_\pm$ es exacta cerca de M_\pm , y los correspondientes campos de Liouville V_\pm (localmente definidos cerca de ∂X) satisfacen que V_+ es saliente a lo largo de M_+ , y V_- entrante a lo largo de M_- ;
- Las formas de contacto $\alpha_\pm = \lambda_\pm|_{M_\pm} = i_{V_\pm} \omega|_{M_\pm}$ satisfacen $\ker \alpha_\pm = \xi_\pm$.

Si $\omega = d\lambda$ es globalmente exacta, el cobordismo simpléctico se dice de *Liouville*. Si $M_- = \emptyset$, el cobordismo simpléctico se dice un *relleno* simpléctico (fuerte; ó de Liouville, en cuyo case se dice un *dominio* de Liouville). Si $M_+ = \emptyset$, el cobordismo simpléctico se dice un *sombrero* simpléctico. M_+ es la componente de borde *convexa*, M_- , la *cóncava*. Si α_\pm están especificadas, decimos que X es un cobordismo simpléctico de (M_-, α_-) a (M_+, α_+) .

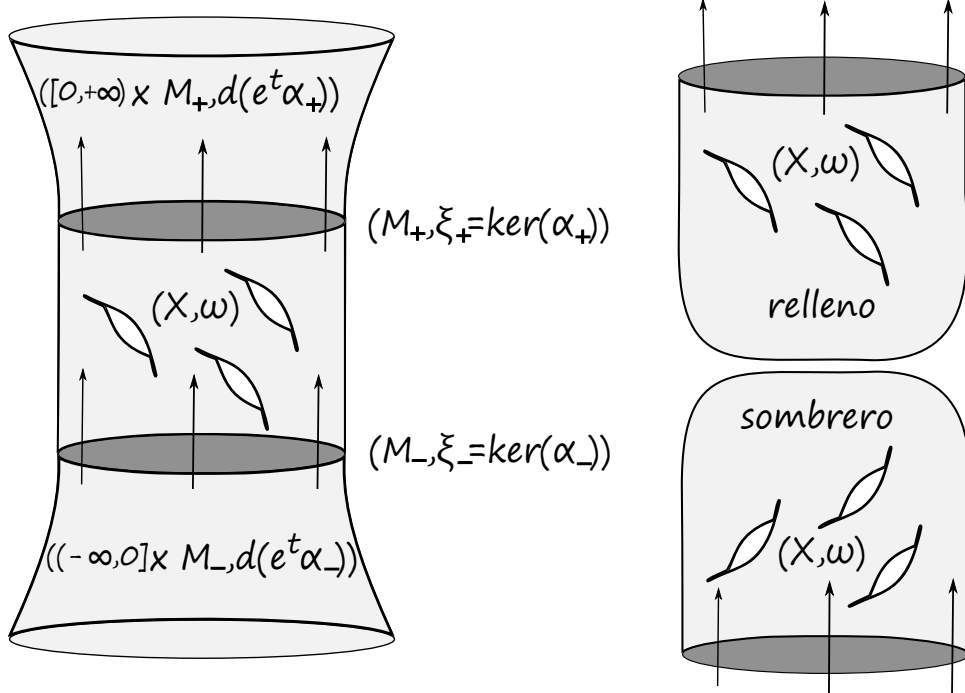


Figure 2: Un cobordismo simpléctico y su completación; un relleno, y un sombrero simpléctico.

Nota: Un cobordismo simpléctico, a diferencia de la noción puramente diferenciable en la cual $-X$ es un cobordismo si X lo es, tiene dirección; puede haber un cobordismo simpléctico de M_- a M_+ , pero no necesariamente vice-versa. También existen las nociones de un cobordismo débil, de Weinstein, y de Stein, que no trataremos en este práctico.

Por la parte (3), existen entornos tubulares $(-\varepsilon, 0] \times M_+ \subset X$, $[0, \varepsilon) \times M_- \subset X$, dónde $\omega = d(e^t \alpha_{\pm})$ respectivamente. Podemos luego considerar la *completación de Liouville* de X , que es por definición

$$(\hat{X}, \hat{\omega}) = ((-\infty, 0] \times M_-, d(e^t \alpha_-)) \cup_{M_-} (X, \omega) \cup_{M_+} ([0, +\infty) \times M_+, d(e^t \alpha_+)),$$

obtenida asociando la simplectización negativa (positiva) de M_- (M_+) a lo largo del borde de X . Ver la Figura 2. La completación de un dominio de Liouville se dice *variedad de Liouville*.

(i) **(Ejemplos de la mecánica)**

(A) **(Espacio de fase)** Probar que el mapa

$$(\mathbb{R} \times S^{2n-1}, d(e^t \alpha_{std})) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \omega_{std})$$

$$(t, x) \mapsto e^t \cdot x,$$

es un simplectomorfismo. Deducir que la bola (B^{2n}, ω_{std}) es un relleno de Liouville de (S^{2n-1}, ξ_{std}) , cuya completación de Liouville es $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{std})$.

(B) **(Espacios cotangentes)** De forma análoga, dada (Q, g) una variedad Riemanniana, probar que el siguiente mapa es un simplectomorfismo:

$$(\mathbb{R} \times S^*Q, d(e^t \alpha_{std})) \rightarrow (T^*Q \setminus Q, \omega_{std})$$

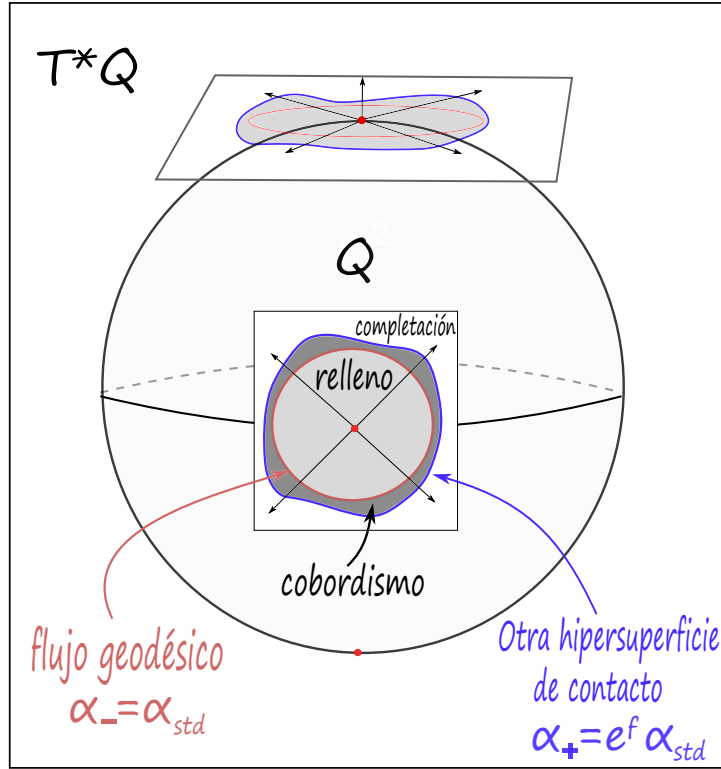


Figure 3: Un cobordismo de Liouville simplécticamente encajado en T^*Q .

$$(t, x) \mapsto e^t \cdot x.$$

Deducir que $(\mathbb{D}^*Q, \omega_{std})$ es un relleno de Liouville de (S^*Q, ξ_{std}) , cuya completación de Liouville es (T^*Q, ω_{std}) . Deducir que si $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ es un Hamiltoniano tal que $H^{-1}(c)$ es estrellado en las fibras para $c \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, dónde $[-\varepsilon, \varepsilon]$ consiste sólo de valores regulares de H , luego $(X = H^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]), \omega_{std})$ es un cobordismo de Liouville de $(M_{-\varepsilon} = H^{-1}(-\varepsilon), \alpha_{std}|_{M_{-\varepsilon}})$ a $(M_{\varepsilon} = H^{-1}(\varepsilon), \alpha_{std}|_{M_{\varepsilon}})$. Ver la Figura 3.

- (ii) Dada una variedad de contacto (M, ξ) co-orientable, y α, α' formas de contacto para ξ , probar que existe un cobordismo de Liouville de (M, α) a $(M, e^K \alpha')$, y de $(M, e^{-K} \alpha')$ a (M, α) , si $K \gg 0$ es una constante suficientemente grande, cuya completación de Liouville es la simplectización de M .

Sugerencia: usar la parte (2).

Nota: Este caso es el caso de cobordismo simpléctico trivial, i.e. la simplectización, dónde el cobordismo va de (M, ξ) a sí misma (i.e. la estructura de contacto está fija, pero no la dinámica de Reeb). Observar que multiplicar por constante no cambia la dinámica de Reeb. Pero la dinámica de α y α' puede ser significativamente diferente.

- (iii) Probar que la relación $M_- < M_+$ si existe un cobordismo simpléctico fuerte de M_- a M_+ es reflexiva y transitiva.

Nota: No es cierto que es simétrica.

Sugerencia: Usar la parte (3).

- (iv) Probar que un sombrero simpléctico nunca puede ser de Liouville.

Sugerencia: Teorema de Stokes.

- (v) Probar que toda superficie orientable y cerrada X admite una forma simpléctica, que necesariamente es no exacta. En el caso que $\partial X \neq \emptyset$, observando que las variedades de contacto cerradas de dimensión 1 sólo puede ser $(S^1, \xi = 0)$, probar que X tiene estructura de cobordismo simpléctico de Liouville, y que cada componente de borde puede elegirse convexa o cóncava de forma arbitraria (siempre y cuando haya al menos una componente convexa, por la parte anterior).

Sugerencia: Para la primera parte, usar que toda superficie orientable y cerrada es un cociente de una variedad compleja (su cubrimiento universal) por la acción holomorfa de un grupo, i.e. que preserva una estructura compleja j (esto es $j^2 = -1$), que además preserva una métrica g ; comprobar que $\omega = g(\cdot, j\cdot)$ es una forma simpléctica que baja al cociente. Para la segunda, elegir una función de Morse φ con puntos críticos en el interior tal que $\partial X = \varphi^{-1}(0)$ es regular. Definir una estructura compleja j cerca del borde en coordenadas cilíndricas, y en entornos de Morse de las singularidades de φ donde $\varphi(s, t) = s^2 \pm t^2 + \varphi(0)$, suficientemente adecuada de forma tal que $\lambda_\varphi = -d\varphi \circ j$ sea de Liouville en esa región, i.e. $d\lambda_\varphi$ es simpléctica. Extender j al resto de la superficie arbitrariamente, y comprobar que $\phi = f \circ \varphi$ con $f' > 0, f'' \geq 0$ satisface que λ_ϕ es una forma de Liouville en caso de que $\partial X \neq \emptyset$; probar que $g_\phi = \omega_\phi(\cdot, j\cdot)$ es una métrica Riemanniana compatible con $\omega_\phi = d\lambda_\phi$ y j , en el sentido que $\omega_\phi(jv, jw) = \omega_\phi(v, w)$, $g_\phi(jv, jw) = g_\phi(v, w)$; chequear que el campo de Liouville asociado es el campo de gradientes $\nabla\phi$ respecto de g_ϕ . Elegir φ adecuadamente para que su campo de gradientes sea saliente/entrante, a gusto. Una tupla $(X, j, \phi, g_\phi, \omega_\phi)$ donde j es integrable (i.e. inducida por multiplicación por i en cartas locales \mathbb{C}^n holomorfas), ϕ es de Morse, $\omega_\phi = -d(d\phi \circ j)$ es simpléctica, y $g_\phi = \omega_\phi(\cdot, j\cdot)$ es una métrica, es lo que se llama una estructura de Stein, y ϕ se dice plurisubarmónica. En tanto, toda superficie orientable con borde no vacío admite una estructura de variedad de Stein. Más aún, toda variedad de Stein es Kähler, y de Weinstein, y en particular, de Liouville. Esto se tratará en el práctico que viene. Si no sale, ver el Lema 4.1 en [LW].

Ejercicio 2

(Descomposición en libro abierto, dinámicas adaptadas)

(1) (Ejemplos)

- (i) **(Libro abierto trivial)** Probar que $S^3 = \text{OB}(\mathbb{D}^2, 1)$, donde una realización concreta es la siguiente. Escribiendo $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, sea $B = \{z_1 = 0\} \subset S^3$ (el no-nudo), y $\pi : S^3 \setminus B \rightarrow S^1$, $\pi(z_1, z_2) = \frac{z_1}{|z_1|}$. Ver Figura 4. Deducir que, cómo el mapping class group $MCG(\mathbb{D}^2, S^1)$ de \mathbb{D}^2 rel. al borde es trivial, esta es la única variedad con un libro con página \mathbb{D}^2 .
- (ii) **(Estabilización)** Probar que $S^3 = \text{OB}(\mathbb{D}^* S^1, \tau)$, donde τ es el Dehn twist positivo a lo largo de la cero sección $S^1 \subset \mathbb{D}^* S^1$ del anillo $\mathbb{D}^* S^1$. Una versión concreta es $\pi : S^3 \setminus L \rightarrow S^1$, $\pi(z_1, z_2) = \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|}$, donde $L = \{z_1 z_2 = 0\}$ es el eslabón de Hopf. Mostrar que este libro es la estabilización del libro trivial. Ver Figura 4.
- (iii) **(Fibraciones de Milnor)** Más en general, sea $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio sin ceros en $B^4 = \{|z| \leq 1\}$ excepto quizás en el origen. Probar que $\pi_f : S^3 \setminus B_f \rightarrow S^1$,

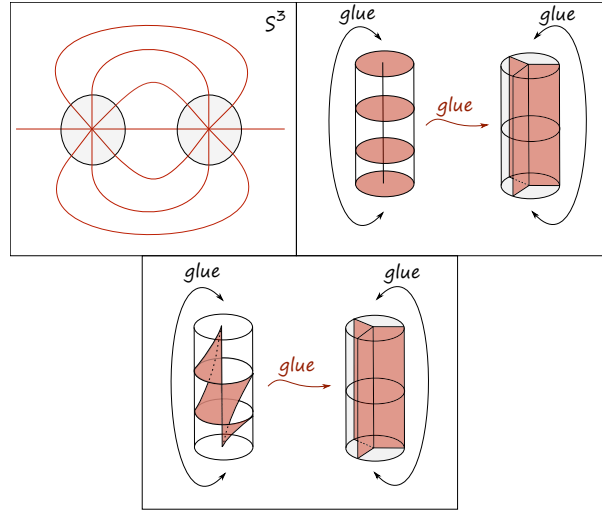


Figure 4: El libro trivial en S^3 (arriba) se obtiene pegando dos toros sólidos por el borde, dónde usamos la descomposición de Heegaard de S^3 de género 1; las páginas se indican en rojo. El libro estabilizado se muestra abajo.

$\pi_f(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2)}{|f(z_1, z_2)|}$, dónde $B_f = \{f(z_1, z_2) = 0\} \cap S^3$, define un libro abierto en S^3 , llamado la *fibración de Milnor* de la singularidad. El link B_f es el *link de la singularidad* (el lomo del libro), y la página, la *fibra de Milnor*; la hipersuperficie $\{f = 0\}$ tiene una singularidad en el origen, y es el *cono de la singularidad*. Probar que si f no tiene singularidad en $(0, 0)$, then B_f es isotópico al no-nudo. Probar que si $f(z, w) = z^p + w^q$ con p, q coprimos, B_f es el nudo tórico (p, q) (i.e. el único nudo en $T^2 \subset S^3$ con clase de homología $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 = H_1(T^2)$, a menos de isotopía). Ver la Figura 5.

Nota: las fibraciones de Milnor son fundamentales en la teoría de las singularidades complejas. Es altamente recomendable leer el libro clásico de Milnor al respecto [M68].

- (v) **(Espacios lente)** Probar que $S^1 \times S^2 = \mathbf{OB}(\mathbb{D}^* S^1, 1)$. Probar que $\mathbb{R}P^3 = \mathbf{OB}(\mathbb{D}^* S^1, \tau^2)$, dónde τ es el Dehn twist positivo a lo largo de la cero sección. Más en general, probar que si $p \geq 1$, tenemos que $L(p, p-1) = \mathbf{OB}(\mathbb{D}^* S^1, \tau^p)$, y si $p \leq 0$, $L(p, 1) = \mathbf{OB}(\mathbb{D}^* S^1, \tau^p)$. Aquí, $L(p, q) = S^3/\mathbb{Z}_p$, es el espacio lente, dónde el generador $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{Z}_p$ actúa via $\zeta \cdot (z_1, z_2) = (\zeta \cdot z_1, \zeta^q \cdot z_2)$. Para $p = 0, 1, 2$, recuperamos los ejemplos de $S^1 \times S^2, S^3$ y $\mathbb{R}P^3$. Cómo el mapping class group (rel. al borde) $MCG(\mathbb{D}^* S^1, \partial \mathbb{D}^* S^1) = \langle \tau \rangle$ está generado por τ , deducir que esto son todos los ejemplos de variedades con libros con página $\mathbb{D}^* S^1$.

(2) (Ejemplos de dinámicas adaptadas)

- (i) Probar que el flujo de Hopf en S^3 está adaptado al libro trivial, y al libro estabilizado. Comprobar que el mapa de retorno de Poincaré es la identidad en \mathbb{D}^2 .
- (ii) Más en general, consideramos el elipsoide

$$E(a, b) = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \frac{\pi|z_1|^2}{a} + \frac{\pi|z_2|^2}{b} \leq 1 \right\},$$

dónde $a, b > 0$. Probar que $S(a, b) := \partial E(a, b)$ es estrellado en \mathbb{C}^2 , y por lo tanto $(E(a, b), \omega_{std}|_{E(a, b)})$ es un relleno de Liouville de $(S(a, b), \alpha_{a, b} := \lambda_{std}|_{S(a, b)})$ cuya com-

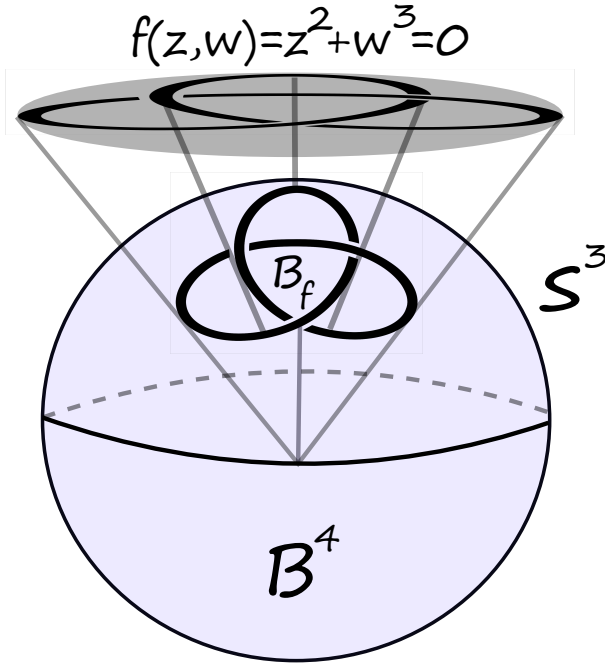


Figure 5: El link de la singularidad del polinomio $f(z, w) = z^2 + w^3$ es el nudo tórico (2, 3), i.e. el nudo de trébol (trefoil knot). El libro asociado en S^3 no es nada menos que la estabilización de $\text{OB}(\mathbb{D}^* S^1, \tau)$, con página un toro menos un disco.

pletación es $(\mathbb{C}^2, \omega_{std})$. Probar que el flujo de Reeb de $\alpha_{a,b}$ es $\varphi_t : S(a, b) \rightarrow S(a, b)$,

$$\varphi_t(z_1, z_2) = (e^{2\pi i a t} z_1, e^{2\pi i b t} z_2).$$

En particular, si a, b son racionalmente independientes, comprobar que este flujo tiene solamente dos órbitas periódicas, que pasan por los puntos $z_1 = 0$, or $z_2 = 0$. Probar que este flujo está adaptado al libro trivial en $S(a, b)$ (pensado como S^3), y también al libro estabilizado. Probar que en el caso del libro trivial, el mapa de retorno es cada página es la rotación en \mathbb{D}^2 de ángulo $2\pi \frac{a}{b}$ (que tiene un único punto fijo en el origen; lo mínimo posible, dado el teorema de Brouwer). Probar que en el caso estabilizado, obtenemos un mapa del anillo $\mathbb{D}^* S^1$ que rota las componentes de borde (el eslabón de Hopf) en la misma dirección, i.e. *no* es un twist map (comparar con el clásico teorema de Poincaré—Birkhoff, que en el caso de un twist map nos da infinitos puntos periódicos distintos).

Notar que si $a = b$, $E(a, a)$ es un múltiplo de la bola, y recuperamos el flujo de Hopf en $S^3 = \partial E(a, a)$.

- (3) **(Relación con la descomposición de Heegaard)** Un cuerpo de asas (orientable) de dimensión 3 y género g es la 3-variedad H_g con borde, resultante de tomar la suma conexa del borde de g copias del toro sólido $S^1 \times \mathbb{D}^2$ (dónde $H_0 = B^3$ es la 3-bola). H_g también se obtiene como resultado de asociar g 1-asas a B^3 . Su borde es Σ_g , la superficie orientable de género g . Una *descomposición de Heegaard* de género g de una 3-variedad cerrada X es una descomposición

$$X = H_g \bigcup_f H'_g,$$

dónde $f : \Sigma_g = \partial H_g \rightarrow \Sigma_g = \partial H'_g$ es un homeomorfismo del borde de dos copias de H_g . La superficie Σ_g se llama la *superficie de descomposición*. La *estabilización* de una

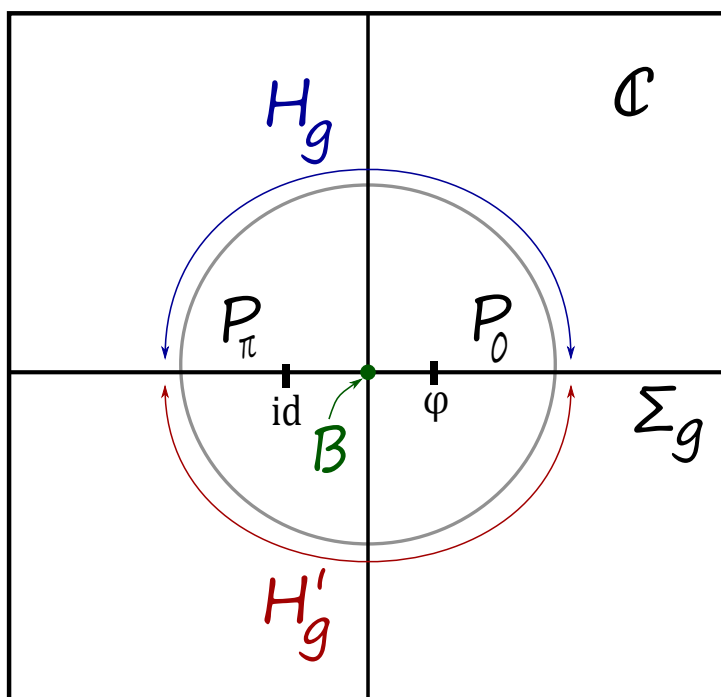


Figure 6: La descomposición de Heegaard asociada a un libro abierto.

descomposición de Heegaard de género g es la descomposición de Heegaard de género $g + 1$ resultante de asociar una 1-asa trivial a Σ_g , i.e. cuyo core es paralelo a Σ_g dentro de H_g (i.e. es un arco en H_g que intersecta a Σ_g sólo en el borde, y es isotópico a un arco contenido en Σ_g).

Nota: Diferentes elecciones de f en $MCG(\Sigma_g)$ da, en general, 3-variedades no homeomorfas. Es un teorema clásico de la topología en dimensión baja que toda 3-variedad cerrada y orientable admite una descomposición de Heegaard. También toda 3-variedad cerrada y orientable admite una descomposición en libro abierto. El objetivo del ejercicio es ver la relación entre las dos.

Dada un libro abierto concreto $p : M \setminus B \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de tipo abstracto $M = \mathbf{OB}(P, \varphi)$, probar que obtenemos un diagrama de Heegaard via

$$H_g = p^{-1}([0, \pi]) \cup B, \quad H'_g = p^{-1}([\pi, 2\pi]) \cup B,$$

dónde la superficie de descomposición es $\Sigma_g = P_0 \cup_B P$, el doble de la página $P_0 = p^{-1}(0)$, obtenida pegando P_0 a la página "opuesta" $P_\pi = p^{-1}(\pi)$. El mapa de pegado f es φ en P_0 , y la identidad en P_π . Ver la Figura 6.

Probar que estabilizar el libro abierto resulta en una estabilización de la descomposición de Heegaard.

Por construcción, notar que la descomposición de Heegaard que surge de un libro abierto es especial en el sentido que el mapa de pegado es la identidad en la "mitad" de Σ_g . De hecho, comprobar que los espacios de lente $L(p, q)$ son exactamente las 3-variedades que admiten descomposición de Heegaard de género 1, y usar la parte (2)(v) del Ejercicio (3) para concluir que no toda descomposición de Heegaard surge de un libro abierto.

Ejercicio 3

(construcción de Giroux–Thurston–Wilkelnkemper, monodromía)

El objetivo de este ejercicio es probar que las nociones de libro abierto abstracta y concreta son equivalentes (a menos de isotopía), y ver una construcción explícita de formas de Giroux de forma abstracta. Esta es debida a Giroux, y generaliza una construcción clásica de Thurston–Wilkelnkemper. Es la parte “fácil” del teorema de Giroux, i.e. ver que todo libro abierto con páginas de Liouville soporta una clase de isotopía de estructura de contacto (que es única no es directo, y el recíproco, i.e. que toda estructura de contacto es soportada por algún libro con páginas de Liouville, es un teorema profundo; unicidad del libro a menos de estabilización es también muy difícil en dimensión 3, y una pregunta abierta en dimensiones altas). La referencia son las notas de Otto van Koert [vK].

Sea $(\Sigma, \omega = d\lambda)$ un dominio de Liouville de dimensión $2n$ (ver ejercicio 1, parte 4), y $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un simpletomorfismo exacto, i.e. $\psi^*\lambda = \lambda - dU$ con $U : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ diferenciable, que satisface $\psi = id$ en un entorno tubular $N = (-1/2, 0] \times B$ de $B = \partial\Sigma$, $U \geq 1$, y $U = 1$ en N . Sea $\alpha_B = \lambda|_B$ la forma de contacto en B , y asumimos $\lambda = e^\rho \alpha_B$ en N , donde $\rho \in (-1/2, 0]$ (ver Ej. 1 (3)). Definimos el toro de mapeo

$$\Sigma_\psi := \Sigma \times \mathbb{R} / (x, \varphi) \sim (\psi(x), \varphi + U(x)).$$

Sea $A(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ el anillo, y definimos el mapa de pegado

$$\Phi : B \times A(1/2, 1) \rightarrow (-1/2, 0] \times B \times S^1,$$

$$(x, re^{i\varphi}) \mapsto (1/2 - r, x, \varphi).$$

Definimos el libro abierto abstracto de dimensión $2n + 1$ cómo

$$M = \mathbf{OB}(\Sigma, \psi) = B \times \mathbb{D}^2 \bigcup_{\Phi} \Sigma_\psi.$$

La fibración asociada es $\pi : M \setminus B \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donde $B = B \times \{0\} \subset M$, dada por $\pi(x, re^{i\varphi}) = \varphi$ en $B \times \mathbb{D}^2$, y $\phi([x, \varphi]) = \frac{\varphi}{U(x)}$ en Σ_ψ . También definimos la 1-forma α en M tal que $\alpha = \lambda + d\varphi$ a lo largo de Σ_ψ , y, en $B \times \mathbb{D}^2$, dada por

$$\alpha = h_1(r)\alpha_B + h_2(r)d\varphi,$$

dónde $h_1, h_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables que satisfacen:

- $h_2(r) = r^2$ cerca de $r = 0$, $h_2(r) > 0$ para $r > 0$, $h_2 \equiv 1$ cerca de $r = 1/2$;
- $h'_1(r) < 0$ para $r > 0$, $h'_1(0) = 0$, $h_1(r) = e^{1/2-r}$ cerca de $r = 1/2$;
- $\det(H) = h_1 h'_2 - h_2 h'_1 > 0$ para $r > 0$, dónde $H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{pmatrix}$ es la matriz Wronskiana.

Ver Figura 7.

- (1) Probar que π, α están bien definidas, y que α es una forma de contacto en M que depende de las funciones h_1, h_2 sólo a menos de isotopía. Probar que el campo de vectores de Reeb R_α de α está dado por

$$R_\alpha = \begin{cases} \partial_\varphi, & \text{en } \Sigma_\psi \\ \frac{1}{\det H}(h'_2 R_B - h'_1 \partial_\varphi), & \text{en } B \times \mathbb{D}^2 \end{cases}$$

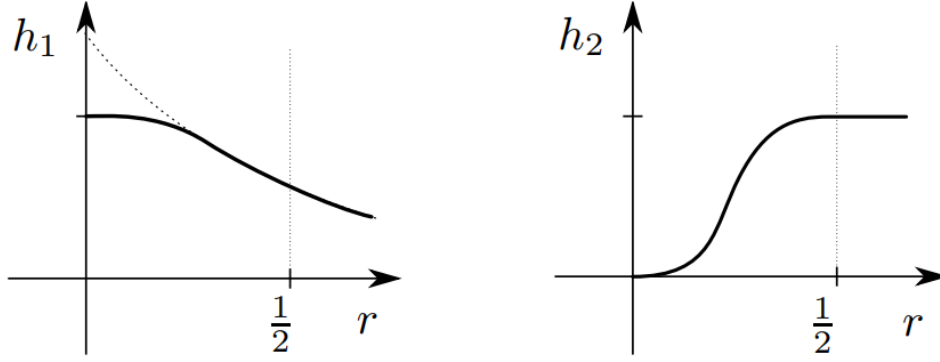


Figure 7: Las funciones de perfil h_1, h_2 .

Probar que la estructura de contacto $\xi = \ker \alpha$ está dada por

$$\xi = \begin{cases} \{v - \lambda(v)\partial_\varphi : v \in T\Sigma\}, & \text{en } \Sigma_\psi \\ \xi_B \oplus \langle \partial_r, h_2(r)R_B - h_1(r)\partial_\varphi \rangle, & \text{en } B \times \mathbb{D}^2 \end{cases}$$

dónde $\xi_B = \ker \alpha_B$, y R_B es el campo de Reeb de α_B . Deducir que $\xi|_B = \xi_B$, y que $\xi \cong T\Sigma$ en $M \setminus B$. Deducir que α es una forma de Giroux, i.e. $d\alpha|_{\pi^{-1}(\theta)}$ es una forma simpléctica (positiva) para todo θ , y $\alpha|_B$ es una forma de contacto (positiva), tal que B es invariante por el flujo de Reeb.

Intuitivamente, ξ está “cerca” del espacio tangente a las páginas lejos de B , y hace un giro en $B \times \mathbb{D}^2$, siendo ξ/ξ_B tangente a \mathbb{D}^2 en el origen. Ver la Figura 8.

Para el recíproco, i.e. ver que todo asumiremos que $\pi : M \setminus B \rightarrow S^1$ es un libro abierto concreto. Construiremos la monodromía, como clase de isotopía de mapas diferenciables (mostrar que, cuando M tiene dimensión impar y una estructura de contacto soportada por un libro, las páginas son sin pérdida de generalidad dominios de Liouville, y tal que hay un representante de la monodromía que es un simplectomorfismo exacto, es cierto pero bastante más trabajoso; ver [vK]).

Por definición de libro, hay un entorno tubular $\nu_M(B) = B \times \mathbb{D}^2 \subset M$ de B dónde $\pi(r, e^{i\varphi}) = \varphi$. Sea g una métrica Riemanniana en M tal que ∂_φ es ortogonal a las fibras de π en $\nu_M(B) \setminus B$. Definimos una conexión para el fibrado π tal que:

- la distribución vertical es $\text{Vert} = \ker(d\pi)$;
- la distribución horizontal es $\text{Hor} = \text{Vert}^\perp$, con respecto a g .

Definimos el campo de vectores X en $M \setminus B$ cómo el levantamiento horizontal de $\partial_\theta \in \mathfrak{X}(S^1)$, y el mapa $\psi : \pi^{-1}(1) \rightarrow \pi^{-1}(1)$ como el tiempo 2π del flujo ϕ_X^t de X (ϕ_X^t es el levantamiento horizontal de $\theta \mapsto e^{i\theta} \in S^1$).

- (2) Probar que ψ no depende de elecciones a menos de isotopía, que es la identidad en $\nu_M(B)$, y que $M = \text{OB}(\Sigma, \psi)$ como variedad diferenciable, dónde $\Sigma = \overline{\pi^{-1}(1)}$ (y $U = 1$).

Ejercicio 4

(Flujo y libro geodésico en S^n)

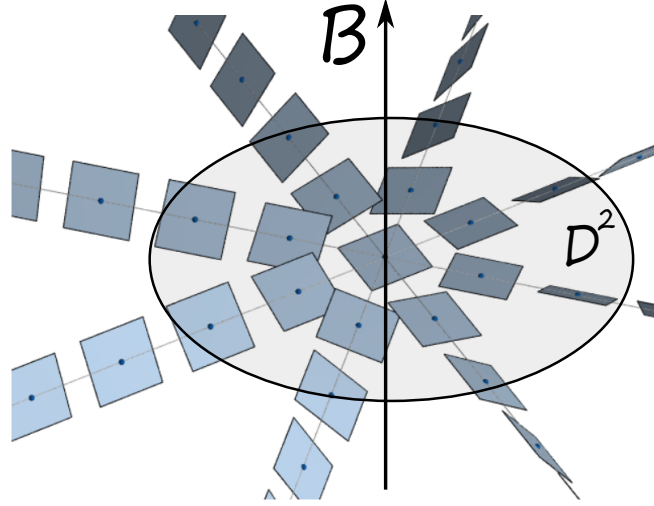


Figure 8: La estructura de contacto ξ adaptada al libro, en el entorno tubular $B \times \mathbb{D}^2$ de B .

Consideramos

$$T^*S^n = \{(\xi, \eta) \in T^*\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \oplus \mathbb{R}^{n+1} : \|\xi\| = 1, \langle \xi, \eta \rangle = 0\}.$$

Comprobar que el campo Hamiltoniano de la energía cinética $Q = \frac{1}{2}\|\eta\|^2|_{T^*S^n}$, en estas coordenadas, es

$$X_Q = \eta \cdot \partial_\xi - \xi \cdot \partial_\eta,$$

i.e. el campo de Reeb de λ_{std} en $\Sigma = Q^{-1}(\frac{1}{2}) = S^*S^n$, que genera el flujo geodésico de la métrica redonda. Comprobar que

$$B := \{(\xi_0, \dots, \xi_n; \eta_0, \dots, \eta_n) \in \Sigma \mid \xi_n = \eta_n = 0\} = S^*S^{n-1}$$

es un conjunto invariante, i.e. el ecuador $S^{n-1} \subset S^n$ es una subvariedad totalmente geodésica. Definimos el mapa

$$\pi_g : \Sigma \setminus B \longrightarrow S^1, \quad (\xi_0, \dots, \xi_n; \eta_0, \dots, \eta_n) \longmapsto \frac{\eta_n + i\xi_n}{\|\eta_n + i\xi_n\|} = e^{i\theta(\xi;\eta)}.$$

Comprobar que esto es un libro abierto en S^*S^n , cuyas páginas son copias de \mathbb{D}^*S^{n-1} , que llamamos el libro *geodésico*. Comprobar que la página $\{\xi_n = 0, \eta_n > 0\}$, i.e. la fibra sobre $1 \in S^1$ ($\theta = 0$), corresponde a todos los covectores a lo largo del ecuador S^{n-1} que apuntan hacia el hemisferio superior de S^n . Ver la Figura 9. Esto es una versión en dimensión alta del famoso *anillo de Birkhoff* ($n = 2$).

Consideramos la forma angular

$$\omega_g = d\pi_g = \frac{\eta_n d\xi_n - \xi_n d\eta_n}{\xi_n^2 + \eta_n^2}.$$

Comprobar que $\omega_g(X_Q) = 1 > 0$, en el complemento de B , y deducir que las páginas de π_g son hipersuperficies globales de sección para el flujo geodésico redondo, por lo tanto (B, π_g) es un libro que soporta la estructura de contacto ξ_{std} en Σ , todas las páginas de π_g se obtienen del “anillo” de Birkhoff $\pi_g^{-1}(\theta = 0)$ fluyendo con el flujo geodésico, y el mapa de retorno de Poincaré $f : \mathbb{D}^*S^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^*S^{n-1}$ es la identidad.

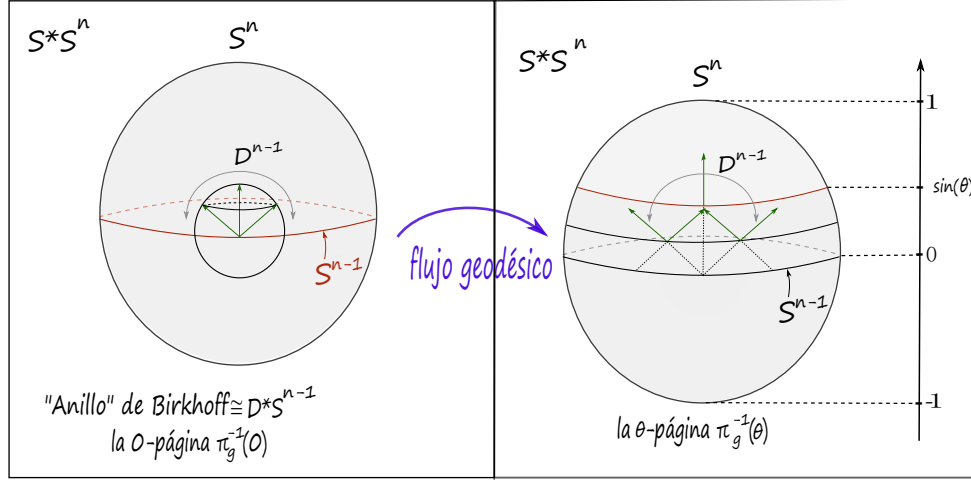


Figure 9: El libro abierto geodésico.

Nota: abajo veremos que $(S^*S^n, \xi_{std}) = \mathbf{OB}(\mathbb{D}^*S^{n-1}, \tau^2)$ donde $\tau : \mathbb{D}^*S^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^*S^{n-1}$ es un *symplectomorfismo exacto* definido originalmente por Arnold en dimensión 4 y extendido por Seidel a dimensiones más altas, y es una generalización del Dehn twist clásico en \mathbb{D}^*S^1 para $n = 2$. En este último caso, reobtenemos el libro abierto $\mathbb{R}P^3 = S^*S^2 = \mathbf{OB}(\mathbb{D}^*S^1, \tau^2)$.

El twist de Dehn-Seidel $\tau : \mathbb{D}^*S^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^*S^{n-1}$, $n \geq 2$, se define de la siguiente manera. Consideramos

$$H : \mathbb{D}^*S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$H(\xi; \eta) = \|\eta\|,$$

con respecto a la métrica redonda. Su flujo Hamiltoniano $\sigma_t : \mathbb{D}^*S^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^*S^{n-1}$ es el *flujo geodésico normalizado* (es el flujo geodésico con velocidad constante 1). Como H es no diferenciable en la cero sección, este flujo no está bien definido en $\eta = 0$. De todas maneras, podemos usar que las geodésicas redondas son periódicas de período 2π para definir un mapa que si se extiende a $\eta = 0$ como el mapa antipodal $A(\xi; 0) = -(\xi; 0)$. Primero, comprobar que si $\eta \neq 0$ vale que

$$\sigma_t(\xi; \eta) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \|\eta\|^{-1} \sin(t) \\ -\|\eta\| \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Sea $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(0) = \pi$, $g'(r) < 0$ para $r \in [0, 1/2)$, $g(r) = 0$ si $r \geq 1/2$. Definimos el twist de Dehn-Seidel (positivo) como

$$\tau(\xi; \eta) = \begin{cases} \sigma_{g(\|\eta\|)}(\xi; \eta), & \eta \neq 0 \\ A(\xi; \eta) = -(\xi; \eta), & \eta = 0. \end{cases}$$

Ver la Figura 10.

- Probar que τ está bien definido, que coincide con el Dehn twist (positivo) usual en el caso $n = 2$, y que es un *symplectomorfismo exacto*, i.e. $\tau^* \lambda_{std} = \lambda_{std} + df$ con $f : \mathbb{D}^*S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.
- Usando el Ejercicio 3, probar que $(S^*S^n, \xi_{std}) = \mathbf{OB}(\mathbb{D}^*S^{n-1}, \tau^2)$. Esto generaliza el caso de $\mathbb{R}P^3$ ($n = 2$).

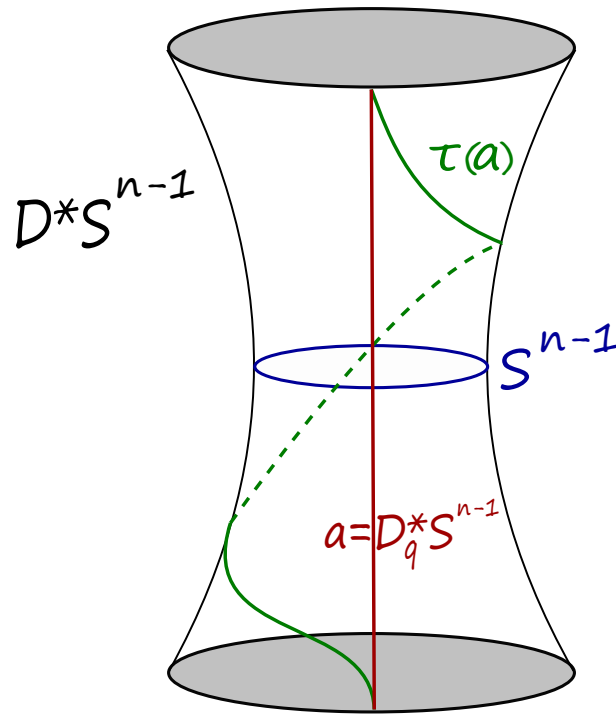


Figure 10: La imagen de una fibra cotangente por el twist de Dehn-Seidel τ .

- (c) De forma análoga, probar que $(S^{2n-1}, \xi_{std}) = \mathbf{OB}(D^*S^{n-1}, \tau)$. Esto generaliza el caso de S^3 ($n = 2$).

Nota: Las partes (b) y (c) no son lo que se diría “fáciles”.

References

- [LW] Latschev, Janko; Wendl, Chris. Algebraic torsion in contact manifolds. With an appendix by Michael Hutchings. *Geom. Funct. Anal.* 21 (2011), no. 5, 1144–1195.
- [M68] Milnor, John. Singular points of complex hypersurfaces. *Annals of Mathematics Studies*, No. 61 Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo 1968 iii+122 pp.
- [vK] van Koert, Otto. Lecture notes on stabilization of contact open books. *Münster J. Math.* 10 (2017), no. 2, 425–455.